解析学演習 B 第一　第 3 回　2014 年 4 月 25 日

1 (☆) 逆三角関数

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^7}{7} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$
$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

の収束半径はいずれも 1 であることを示せ。

2 (☆☆) 次の級数が収束する z をすべて求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1+z}{z}\right)^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$.

3 (☆) 次の関数を $z-1$ の整級数に展開せよ。またその収束半径を求めよ。

$$\frac{2z+3}{z+1}.$$

4 (☆) 整級数 $\sum a_n z^n$ の収束半径が ρ のとき、$\sum a_n z^{2n}$ および $\sum a_n^2 z^n$ の収束半径を求めよ。

5 (☆☆) 整級数 $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ の収束半径が ρ のとき、次の整級数の収束半径も ρ であることを示せ：

$$\sum_{n\geq 0} n^3 a_n z^n.$$

この関数を $g(z)$ とおくとき、$g(z)$ を $f(z)$ を用いて表せ。

6 (☆☆) (1) 正項数列 $\{a_n\}$ について、次が成り立つことを示せ:

$$\limsup_{n\to\infty}\{(n+1)a_{n+1}\}^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty}(na_n)^{\frac{1}{n}}$$

(2) 正項数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$

が成り立つことを示せ。また等号が成立しない例を一組挙げよ。

(裏へ続く)

7 (☆) n を自然数とする。関数 $f(z) = z^{-n}$ は複素微分可能であり、

$$\frac{d}{dz} z^{-n} = -n z^{-n-1}$$

が成り立つことを複素微分可能性の定義に従って示せ。

8 (☆) 項別微分により以下を確かめよ。

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z, \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz} \log(1+z) = \frac{1}{1+z}$$

9 (☆) n を自然数とする。次の等式を示せ。

$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad \binom{1/2}{n} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}.$$

ただし、$k < 0$ に対し $k!! = 1$ とする。

10 (☆☆) 累乗関数

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad \binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, & (n > 0) \\ 1, & (n = 0) \end{cases}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha = -1$ のとき、$(1+z)^\alpha$ は既知の関数 $1/(1+z)$ と一致することを示せ。

(2) $\alpha = -m$ (m は自然数) のとき、$(1+z)^\alpha$ は既知の関数 $1/(1+z)^m$ と一致することを示せ。

(以上)