解析学演習 B 第一　第 2 回　2014 年 4 月 18 日

1 (☆) 正項級数の収束に関するダランベールの判定法を証明せよ。すなわち、正項級数 $\sum a_n$ について、極限値

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0,\infty]$$

が存在するとき、級数 $\sum a_n$ は $\alpha < 1$ のとき収束し、$\alpha > 1$ のとき発散することを示せ。

2 (☆☆☆) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数とする。
(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ が存在するとし、それを α とする。($\alpha \in [0,\infty]$ である。) 級数 $\sum a_n$ は $\alpha < 1$ ならば収束し、$\alpha > 1$ ならば発散することを示せ。(コーシーの判定法)
(2) (1) で極限を上極限に置き換えても同じ結論が成り立つことを示せ。
(3) (2) を用いて、べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

の逆数で与えられることを示せ。ただし $0^{-1} = \infty$, $\infty^{-1} = 0$ と約束する。(コーシー・アダマールの公式。)

3 (☆) オイラーの関係式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

を確かめよ。ただし

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

4. 次の級数の収束・発散を調べよ。((1)= ☆, $\{(2),(3)\} = (4) = \{(5),(6)\} =$ ☆☆, (7)= ?)

(1) $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{an+b}$ $(a,b>0)$　(2) $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{n^a}{2^n}$ $(a \in \mathbb{R})$　(3) $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{n^a}{n!}$ $(a \in \mathbb{R})$　(4) $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{\log n}{n^2}$

(5) $\displaystyle\sum_{n>0} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$　(6) $\displaystyle\sum_{n>0} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$　(7) $\displaystyle\sum_{n>0} \left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$ $(a \in \mathbb{R})$

5. 次のべき級数の収束半径を求めよ。($\{(1),(2)\} = \{(3),(4)\} = \{(5),(6)\} =$ ☆)

(1) $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n>0} 2^n z^{2^n}$　(3) $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{\log n}{n} z^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n>0} z^{n!}$

(5) $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^n$　(6) $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{(2n-1)!!}{n^n} z^n$　($7!! = 7\cdot5\cdot3\cdot1$, $8!! = 8\cdot6\cdot4\cdot2$ 等。)

(裏へ続く)

6. (☆☆) 次の等式を示せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-z)^2} & |z| < 1, \\ \dfrac{1}{z(1-z)^2} & |z| > 1. \end{cases}$$

（ヒント：(1) は $\frac{1}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$ を部分分数に展開する。(2) は $z = 1/w$ とおく。）

(以上)