

## 解析学演習 B 第一 第 1 回 2014 年 4 月 11 日

1 (全部まとめて☆☆) 次の複素数の極形式を求めよ。

(1)  $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$     (2)  $(2+2i)^3$     (3)  $(1+i)^n + (1-i)^n$  ( $n$  は整数.)

2 (☆☆)  $z = re^{i\theta}$  のとき、オイラーの関係式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  を用いて  $\frac{1}{1-z}$  の実部と虚部を  $r, \theta$  で表せ。また、これと  $\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$  ( $|z| < 1$ ) を用いて次式を示せ。

$$\sum_{n \geq 0} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \quad \sum_{n \geq 0} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \quad (0 \leq r < 1).$$

3 (☆)  $n$  を自然数とする。1 の  $n$  乗根をすべて求め、ガウス平面に図示せよ。(代数学の基本定理や因数定理を使ってはいけない。)

4 (☆☆) 任意の複素数  $c = a + ib$  ( $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ ) に対して写像  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$f: z \mapsto cz$$

で定める。 $\mathbb{C}$  を通常の方法で  $\mathbb{R}^2$  と同一視する (すなわち複素数  $z = x + iy$  と点  $(x, y)$  を同一視する) とき、 $f$  は明らかに  $\mathbb{R}$  上の線形写像である。 $\mathbb{R}^2$  の標準的な基底に関する  $f$  の表現行列を求めよ。また、この表現行列と、回転行列の関係を述べよ。

5 (☆) 複素数列  $\{a_n\}$  に対して  $a_n = b_n + ic_n$  ( $b_n, c_n \in \mathbb{R}$ ) とおいて実数列  $\{b_n\}, \{c_n\}$  を定めるとき、 $\{a_n\}$  がコーシー列であることと  $\{b_n\}, \{c_n\}$  がともにコーシー列であることが同値であることを、コーシー列の定義に従って示せ。(これと  $\mathbb{R}$  の完備性から、 $\mathbb{C}$  の完備性が従う。)

6 (まとめて☆☆)  $a_n = 1/n$  とおくとき級数  $\sum_{n \geq 1} a_n$  が収束しないことを次の 2 通りの方法で示せ。

(1)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$  を使う。

(2)  $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k$  とおくとき数列  $\{S_n\}$  がコーシー列ではないことを示す。(ヒント:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) \neq 0$  を示す。)

(以上)