C^∞ 級関数の構成

ここでは有用な C^∞ 級関数の例をいくつかあげるが, 元になるのは次の C^∞ 級関数である. (C^∞ 級の証明は後で.)

[1] $\rho^0(x)=k(x):=\begin{cases}0 & x\leqq 0\\ e^{-\frac{1}{x}}=\exp(-1/x) & x>0\end{cases}$ (図)

($x>0$ で単調増加. $\lim_{x\to\infty}\rho^0(x)=1$.)

次に, 有用な性質 (やグラフ) と, その例として $\rho^0(x)$ を元に構成される C^∞ 級関数を挙げる. 以下 $a>b>0$ とする.

[II] $\begin{cases}\rho^1(x)=0 & (x\leqq 0)\\ 0<\rho^1(x)<1 & (0<x<1)\\ \rho^1(x)=1 & (x\geqq 1)\end{cases}$ (図) をみたす関数として $\rho^1(x):=\dfrac{\rho^0(x)}{\rho^0(x)+\rho^0(1-x)}$

$\rho^0(x)>0$ $(x>0)$, $\rho^0(1-x)>0$ $(x<1)$ より分母 >0 $(\forall x)$. $\rho^0(1-x)=0$ $(x\geqq 1)$ より $x\geqq 1$ で 分母 = 分子.

($0<x<1$ で単調増加も分る. また, $a>0$ に対し $\rho^1(x/a)$ は, $x\leqq 0$ で 0, $x\geqq a$ で 1, $0<x<a$ で $0<\rho^1(x/a)<1$.)

[III] $\begin{cases}\rho^2_{a,b}(x)=0 & (|x|\geqq a)\\ 0<\rho^2_{a,b}(x)<1 & (b<|x|<a)\\ \rho^2_{a,b}(x)=1 & (|x|\leqq b)\end{cases}$ (図) をみたす関数として $\rho^2_{a,b}(x):=\rho^1\Big(\dfrac{x+a}{a-b}\Big)\rho^1\Big(\dfrac{-x+a}{a-b}\Big)$

特に $\rho^2(x):=\rho^2_{2,1}(x):=\rho^1(x+2)\rho^1(-x+2)$

[IV] $\begin{cases}\rho(x)=0 & (|x|\geqq a)\\ \rho(x)>0 & (|x|<a)\end{cases}$ (図) をみたす C^∞ 級関数としては, $\rho^2_{a,0}(x)=\rho^1\Big(\dfrac{x+a}{a}\Big)\rho^1\Big(\dfrac{-x+a}{a}\Big)$ や, より簡単なものでは $\rho^3(x):=\rho^0(2(x+1))\rho^0(2(-x+1))$ として $\rho^3_a(x):=\rho^3(x/a)$ や, $\rho^4_a(x):=\rho^0(x+a)\rho^0(-x+a)$ がある:

$$\rho^3(x)=\begin{cases}\exp\Big(\dfrac{-1}{1-|x|^2}\Big) & (|x|<1)\\ 0 & (|x|\geqq 1)\end{cases},\quad \rho^3_a(x)=\begin{cases}\exp\Big(\dfrac{-a^2}{a^2-|x|^2}\Big) & (|x|<a)\\ 0 & (|x|\geqq a)\end{cases},\quad \rho^4_a(x):=\begin{cases}\exp\Big(\dfrac{-2a}{a^2-x^2}\Big) & (|x|<a)\\ 0 & (|x|\geqq a)\end{cases}$$

これらを用いれば, 例えば区間 (c,d) 上で正, 他で 0 となる C^∞ 級関数が平行移動等により次の様に構成できる:

$\varepsilon:=(d-c)/2$, $e:=(c+d)/2$ $(\therefore c=e-\varepsilon,\ d=e+\varepsilon)$ として $\rho^3_\varepsilon(x-e)$ や, $\rho^0(x-c)\rho^0(-x+d)$ 等.

他の構成法: $S:=\int_{-\infty}^{\infty}\rho^3(x)dx=\int_{-1}^{1}\rho^3(x)dx$ として $\varphi(x):=S^{-1}\rho^3(x)$ とし, $\varphi_a(x):=a^{-1}\varphi(x/a)$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=1=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_a(x)dx\ \Big(=\int_{-a}^{a}\varphi_a(x)dx\Big)\quad \Big(\max_x\varphi_a(x)=a^{-1}e^{-1}\to\infty\ \ (a\to 0)\Big)$$

この様な関数は mollifier (軟化子) といわれ, $\Phi_a f(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi_a(x-t)dt$ $(=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\varphi_a(t)dt)$ は C^∞ 級.

このとき, $f(x):=0$ $(x\leqq 1/2)$, $:=1$ $(1/2<x)$, $a=1/2$ とすれば $\Phi_{1/2}f(x)$ は [II] をみたし, [III] をみたす関数 $\Phi_\varepsilon f(x)$ が, $\varepsilon:=((a-b)/2$, $e:=((a+b)/2$ とし $f(x):=0$ $(|x|\geqq e)$, $:=1$ $(|x|<e)$ とすれば得られる.

[I の証明] ($k(x):=\rho^0(x)$ が C^∞ 級を示す.) $k^{(n)}(x):=\frac{d^nk}{dx^n}(x)$ $(k=0,1,\ldots)$ とする. $k(x)$ は, $x<0$ では 0 より, $x>0$ では $k(x)=e^{-1/x}$ は C^∞ 級関数 e^x と $-1/x$ の合成関数として C^∞ 級. $\therefore x=0$ で $k^{(n)}(x)$ が連続かつ微分可能, を示せばよい. $x<0$ で $k^{(n)}(x)=0=\lim_{x\to-0}k^{(n)}(x)$ $(\forall n)$ より, まず $x>0$ で $(e^{-1/x})^{(n)}$ を求め, $\lim_{x\to+0}k^{(n)}(x)=0$ を示す.

$x>0$ のとき, $t=1/x$, $h(t):=e^{-t}=e^{-1/x}=k(x)$ とおく. $\dot h(t):=\frac{dh}{dt}(t)$ とすると $\dot h(t)=-e^{-t}=-h(t)$.

$$k'(x):=k^{(1)}(x)=\dot h(1/x)(1/x)'=-h(t)(-1/x^2)=t^2h(t)=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}.$$

$$k^{(2)}(x)=\frac{d(t^2h(t))}{dt}(1/x)'=(2th(t)+t^2\dot h(t))(-t^2)=(t^4-2t^3)h(t)=\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)e^{-1/x}$$

同様に, $k^{(n)}(x)=P_n(1/x)k(x)=P_n(t)h(t)$ となる多項式 $P_n(t)$ $(P_0(t)=1,\ P_1(t)=t^2,\ P_2(t)=t^4-2t^3)$ が帰納的に

$$P_{n+1}(t)h(t)=k^{(n+1)}(x)=(k^{(n)}(x))'=\frac{dP_n(t)h(t)}{dt}(1/x)'=(\dot P_n(t)-P_n(t))h(t)(-t^2)=t^2(P_n(t)-\dot P_n(t))h(t)$$

より $P_{n+1}(t):=t^2P_n(t)-t^2\dot P_n(t)$ $(2(n+1)$ 次多項式) と定まる . (この式からも $x>0$ で $e^{-1/x}$ は C^∞ 級, が分る.)

ここで, 一般に 任意の $m=0,1,2,\ldots$ に対し $(0!=1!=1$ として), L'hospital(ロピタル) の定理により

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^m}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{mt^{m-1}}{e^t}=\cdots=\lim_{t\to\infty}\frac{m!t}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{m!}{e^t}=0\ \Big(t>0\Rightarrow e^t>\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}.\ \therefore\ \frac{t^m}{e^t}<\frac{(m+1)!t^m}{t^{m+1}}\to 0\ (t\to\infty)\Big)$$

なので, 任意の多項式 $p(t)=a_mt^m+a_{m-1}t^{m-1}+\cdots+a_1t+a_0$ に対し

$$\lim_{x\to+0}p(1/x)k(x)=\lim_{t\to\infty}p(t)e^{-t}=a_m\lim_{t\to\infty}t^me^{-t}+\cdots+a_0\lim_{t\to\infty}e^{-t}=0+\cdots+0=0$$

特に $\lim_{x\to+0}k^{(n)}(x)=\lim_{t\to\infty}P_n(t)e^{-t}=0=\lim_{x\to-0}k^{(n)}(x)$.

次に $x=0$ での $k^{(n)}(x)$ の連続性と微分可能性を帰納法で示す.

$n=0$ のとき $\lim_{x\to+0}k(x)=0=k(0)=\lim_{x\to-0}k(x)$ より $k(x)$ は連続.

帰納的に $k^{(n)}(0)=0$ $(\therefore k^{(n)}(x)$ は連続) と仮定すると $k^{(n)}(x)$ の 左右の微分係数は

$$\lim_{x\to+0}\frac{k^{(n)}(x)-k^{(n)}(0)}{x}=\lim_{t\to\infty}tP_n(t)e^{-t}=0=\lim_{x\to-0}\frac{0}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{k^{(n)}(x)-k^{(n)}(0)}{x}$$

より $k^{(n)}(x)$ は $x=0$ で微分可能で $k^{(n+1)}(0)=0$. $\therefore$ 帰納法により $k(x)$ は C^∞ 級. □

関数の準備 $\rho_{a,b}(x) := \rho^2_{a,b}(x)$ $(0<b<a)$ とおくと, $\rho_{a,b}(x)$ は C^∞ 級で, $\rho_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leqq b) \\ 0 & (|x| \geqq a) \end{cases}$ $(0 \leqq \rho_{a,b}(x) \leqq 1)$.
$I_a := [-a, a]$, $\mathring{I}_a := (-a, a)$ ($^\circ$ は内部を表す), $I^m_a = I_a \times \cdots \times I_a$ とし, C^∞ 級関数 $\rho^m_{a,b} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を次式で定める:

$$\rho^m_{a,b}(x_1, \ldots, x_m) := \rho_{a,b}(x_1) \cdots \rho_{a,b}(x_m) \text{ (積)} \quad \therefore\ \rho^m_{a,b}(I^m_b) = \{1\},\ \rho^m_{a,b}(\mathbb{R}^m \backslash \mathring{I}^m_a) = \{0\},\ \rho^m_{a,b}(\mathring{I}^m_a \backslash I^m_b) \subset (0,1).$$

(原点が中心で半径が b の開球体 $B^m(b)$ 上で 1, $\mathbb{R}^m \backslash B^m(a)$ 上で 0 とするには $\rho^m_{a,b}(\boldsymbol{x}) := \rho_{a^2,b^2}(|\boldsymbol{x}|^2)$ とする.)
$\varepsilon > a$ に対し, $p \in M$ の周りの座標近傍 $(U, \varphi : U \to U')$ で (必要なら平行移動と値域の拡大の微分同相を合成して φ を取替えることにより) $\varphi(p) = 0$, $I^m_a \subset \mathring{I}^m_\varepsilon \subset U'$ となるものがとれる. (U' を $\varphi^{-1}(\mathring{I}^m_\varepsilon)$ に置き換えることにより $\mathring{I}^m_\varepsilon = U'$ としてもよい.) このとき, $\rho : M \to \mathbb{R}$ を

$$\rho(q) := \begin{cases} \rho^m_{a,b}(\varphi(q)) & (q \in U) \\ 0 & (q \notin U) \end{cases} \qquad (\rho(q) = 0 \ \ (q \in M \backslash \varphi^{-1}(I^m_a)))$$

と定めると M が C^r 級なら M 上の C^r 級関数になる. (座標近傍 (U, φ), 開集合 $M \backslash \varphi^{-1}(I^m_a)$ 上で C^∞ なので.)
特に, $b=1$, $a=2$, $\varepsilon=3$, $U' = \mathring{I}^m_3$ としておいてよい.

局所関数の拡張 $p \in M$ の周りの局所関数 $f \in C^r(p)$, $f : U_f \to \mathbb{R}$ に対し, p の近傍 W と M 上の C^r 級関数 $g : M \to \mathbb{R}$ が存在して, $f|_W = g|_W$ $(W \subset U_f)$ をみたす. (従って接空間の定義等では $C^r(p)$ の代わりに $C^r(M)$ を用いてもよい.)
(∵) (必要なら上の座標近傍 (U, φ) において U を $U \cap U_f$ に取り換えることにより) 座標近傍 (U, φ) で $\varphi(p) = 0$, $U \subset U_f$, $\mathring{I}^m_\varepsilon \subset U'$ となるものがとれる. このとき, $W := \varphi^{-1}(I^m_b)$ とおけば $\rho(q) = 1$ $(q \in W)$ で,

$$g(q) := (f(q) \cdot \rho(q) =) \begin{cases} f(q) \cdot \rho(q) & (q \in U) \\ 0 & (q \notin U) \end{cases} = \begin{cases} f(q) & (q \in W) \\ 0 & M \setminus \varphi^{-1}(I^m_a)\ (\supset M \backslash U) \end{cases}$$

は C^r 級関数になる. □
同様に p の開近傍 V 上のベクトル場 X に対し, 座標近傍 (U, φ), $U \subset V$ と $p \in W \subset U$ をとり, $\tilde{X} = \rho \cdot X$ $(\tilde{X}(q) := \rho(q) X(q)\ (q \in U),\ \tilde{X}(q) := 0\ (q \notin U))$ とすれば $\tilde{X}|_W = X_W$ となる M 上のベクトル場 $\tilde{X}$ を得る.

1 の分割 位相空間 X の被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ について, $\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の **細分 (refinement)** とは $\forall V_\beta$ に対し, $V_\beta \subset U_\alpha$ となる U_α が存在するときをいう. 即ち, 写像 $\delta : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, $V_\beta \subset \delta(V_\beta)$ が存在するときである. さらに $\forall V_\beta$ が開集合のとき $\mathcal{V}$ を**開細分**という. 部分集合族 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が**局所有限 (locally finite)** であるとは $\forall x \in X$ に対し, x の近傍 U で, U と交わる U_α が有限個になるものが存在するときをいう. $(\#\{U_\alpha \in \mathcal{U} \mid U \cap U_\alpha \neq \emptyset\} < \infty)$ X が **paracompact (パラコンパクト)** とは, 任意の開被覆が局所有限開細分をもつときをいう. 多様体 M については, M が第 2 可算公理をみたす $\Rightarrow$ M は paracompact, M が paracompact $\Rightarrow$ M の各連結成分は第 2 可算公理をみたす, が知られている. (演習問題) 従って多様体ではこれらの違いは, 第 2 可算なら連結成分は高々可算個という所だけ.
X 上の連続関数族 $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が **1 の分割 (partition of unity)** とは, $\forall f_\lambda(x) \geqq 0$ $(x \in X)$, $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) \equiv 1$ をみたすときをいう. (ここで, $\forall x \in X$ について $f_\lambda(x) > 0$ となる λ は有限個 (又は高々可算で和は収束) と仮定されている.) また, $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が**局所有限**とは, $\operatorname{supp} f_\lambda := \overline{\{x \in X \mid f_\lambda(x) \neq 0\}}$ とするとき, $\{\operatorname{supp} f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が局所有限のときをいう. X 上の局所有限連続関数族 $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ については各点 x_0 のある近傍上で和 $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$ は有限和になるので $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$ は連続になる. さらに X が C^r 多様体, $\{f_\lambda\}_\lambda$ が C^r 級関数族なら $\sum_\lambda f_\lambda(x)$ は C^r 級になる.
X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と局所有限 1 の分割 $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について, $\{\operatorname{supp} f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $\mathcal{U}$ の細分になるとき $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は $\mathcal{U}$ に従属するという. X が paracompact $\Longleftrightarrow$ X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対し $\mathcal{U}$ に従属する局所有限 1 の分割が存在する, が知られているが, パラコンパクト C^r 多様体上では次が成り立つ.

定理 パラコンパクト C^r 多様体 M $(0 \leqq r \leqq \infty)$ 上の任意の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対し, $\mathcal{U}$ に従属する C^r 級局所有限 1 の分割 $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在する. 即ち,
(i) (1 の分割) 各 $f_\lambda : M \to \mathbb{R}$ は C^r 級で, $0 \leqq f_\lambda(p) \leqq 1$ $(p \in M)$. (ii) 各点 $p \in M$ で $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(p) = 1$.
(iii) (細分) 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\operatorname{supp} f_\lambda \subset U_\alpha$ となる $U_\alpha \in \mathcal{U}$ が存在する.
(iv) (局所有限) 各点 $p \in M$ のある近傍 V で, $V \cap \operatorname{supp} f_\lambda \neq \emptyset$ となる λ が有限個となるものが存在する.
(このとき, 各 $\operatorname{supp} f_\lambda$ がある座標近傍に含まれる様に出来る.)

$\mathring{A}$ は A の内部, $\bar{A}$ は A の閉胞を表す.

補題 1 第 2 可算公理をみたす局所 compact Hausdorff 空間 X には次をみたすコンパクト集合の増大列 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \cdots$ が存在する: (i) $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. (ii) $A_n \subset \mathring{A}_{n+1} (n = 1, 2, \ldots)$. 特に X は σ compact.

($\because$) X の可算開基を $\mathcal{B}'$ とし, $\mathcal{B} := \{O \in \mathcal{B}' \mid \bar{O}$ は compact$\}$ とおけば $\mathcal{B}$ も可算開基になる. 実際, 任意の開集合 U と $x \in U$ をとれば, X は局所 compact Hausdorff 空間なので, x の compact 近傍 C で $C \subset U$ となるものが存在する. $\mathcal{B}'$ は開基なので $x \in O \subset C$ となる $O \in \mathcal{B}'$ が存在する. $\bar{O}$ は compact Hausdorff 空間 C の閉集合なので $\bar{O}$ は compact. 即ち $O \in \mathcal{B}$ より $\mathcal{B}$ は開基になる. $\mathcal{B} = \{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ とし, $\{A_n\}$ を帰納的に次の様に定義する:
$A_1 := \bar{O}_1$ とし, A_n まで定義されたとする. A_n は compact で $\mathcal{B}$ は開被覆なので, 十分大きい j をとれば
$A_n \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_j$ と出来る. この様な j の中で $j \geqq n+1$ となる最小のものを k とし.
$A_{n+1} := \bar{O}_1 \cup \cdots \cup \bar{O}_{n+1} \cup \cdots \cup \bar{O}_k \ (= \overline{\cup_{i=1}^{k} O_i})$ とおくと A_{n+1} は compact 集合の有限和なので compact.
$A_n \subset \cup_{i=1}^{k} O_i \subset A_{n+1}$ なので $A_n \subset \mathring{A}_{n+1}$. $\bar{O}_{n+1} \subset A_{n+1}$ なので $X = \cup_{n=1}^{\infty} O_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ より $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. □
注: $A_n \backslash \mathring{A}_{n-1}$ は A_n の閉集合なので compact で, $\mathring{A}_{n+1} \backslash \bar{A}_{n-2}$ はその開近傍. (但し $A_0 = A_{-1} := \emptyset$.)
X が compact なら ある n で $A_n = X$.

定理 2 M^m を第 2 可算公理をみたす C^r 多様体 $(0 \leqq r \leqq \infty)$, $\mathcal{V}$ を任意の開被覆とする. このとき M の座標近傍系 $\mathcal{S} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ (高々可算個) で次をみたすものが存在する. (特に M はパラコンパクト.)
(i) $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は局所有限で $\mathcal{V}$ の細分. (ii) $U_i' := \varphi_i(U_i) = \mathring{I}_3^m$. (iii) $W_i := \varphi_i^{-1}(\mathring{I}_1^m)$ とすると $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は M の開被覆.

証明 M は第 2 可算公理をみたす局所 compact Hausdorff 空間なので, 補題 1 のコンパクト集合の増大列
$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \subset \mathring{A}_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = M$ $(A_0 = A_{-1} := \emptyset)$ が存在する.
各 compact 集合 $C_n := A_n \backslash \mathring{A}_{n-1}$ とその各点 $p \in C_n$ に対し, $\mathcal{V}$ は開被覆なので $p \in V \in \mathcal{V}$ となる V があり, p の開近傍 $V \cap (\mathring{A}_{n+1} \backslash \bar{A}_{n-2})$ の中に座標近傍 $(U_{n,p}, \varphi_{n,p})$ で $\varphi_{n.p}(p) = 0$ かつ (ii) をみたすものがある. $W_{n.p} := \varphi_{n,p}^{-1}(\mathring{I}_1^n)$ とすると $\{W_{n.p}\}_{p \in C_n}$ はコンパクト集合 C_n の開被覆なので有限個の $\{W_{n,p_i} \mid i = 1, \ldots, k(n)\}$ で被覆できる. このとき $\{(U_{n,p_i}, \varphi_{n,p_i}) \mid n \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, k(n)\}$ が求めるものである. 実際, 有限個の高々可算和なので高々可算個で, 作り方から $\mathcal{V}$ の細分であり, (ii),(iii) をみたしており, $\mathring{A}_n \cap U_{j,p_i} \neq \emptyset$ なら $j \leqq n+1$ なので ($\because$ $U_{n+2,p_i} \subset \mathring{A}_{n+3} \backslash \bar{A}_n$), $\mathring{A}_n$ と交わるのは $\sum_{j=1}^{n+1} k(j)$ 個なので局所有限.

定理 2 の系として

定理 3 第 2 可算公理をみたす C^r 多様体 M^m の任意の開被覆 $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, $\mathcal{V}$ に従属する局所有限 C^r 級関数族 $\{\rho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (即ち, (i)(C^r) 各 ρ_i, f_i, f_λ は C^r 級で, (ii)(従属) 各 $\operatorname{supp} \rho_i, \operatorname{supp} f_i, \operatorname{supp} f_\lambda$ はある $V \in \mathcal{V}$ に含まれ, (iii)(局所有限) 各点 $p \in M$ の近傍 U で $\{\operatorname{supp} \rho_i\}, \{\operatorname{supp} f_i\}, \{\operatorname{supp} f_\lambda\}$ と交わるのは有限個であるものが存在する) で (0) $0 \leqq \rho_i(p)$, $f_i(p)$, $f_\lambda(p) \leqq 1$ であり, 次をみたすものがが存在する:
$\{\rho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$: (1) 各 $\operatorname{supp} \rho_i$ は compact で, ある座標近傍 (U_i, φ_i) に含まれる. (2) $\{\operatorname{Int} \rho_i^{-1}(1)\}_{i \in \mathbb{N}}$ は M の開被覆.
$\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$: (1) 各 $\operatorname{supp} f_i$ は compact で, ある座標近傍 (U_i, φ_i) に含まれる. (2) $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は 1 の分割: $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(p) = 1$.
$\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: (1) $\operatorname{supp} f_\lambda \subset V_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$. (2) $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は 1 の分割: $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(p) = 1$.

証明 定理 2 の座標近傍系 $\mathcal{S} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ と, 各 (U_i, φ_i) について関数の準備で述べた ρ (b=1, a=2, ε=3) をとり ρ_i とする. ($0 \leqq \rho_i(p) \leqq 1$, $\rho_i(W_i) = \{1\}$, $\rho_i(M \backslash U_i) = \{0\}$). $\operatorname{supp} \rho_i = \varphi_i^{-1}(I_2^m) \subset U_i$ は compact で, $\{U_i\}$ が局所有限なので $\{\operatorname{supp} \rho_i\}$ も局所有限. また $W_i = \operatorname{Int} \rho_i^{-1}(1)$ で, 定理 2 より $\{W_i\}$ は開被覆.
$f_i(p) := \dfrac{\rho_i(p)}{\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j(p)}$ とおけば, 分母は $\{W_i\}$ が開被覆なので各点で 1 以上で (0 でない), $\{\operatorname{supp} \rho_i\}$ が局所有限なので C^r 級. また, $\operatorname{supp} f_i = \operatorname{supp} \rho_i$ より $\{\operatorname{supp} f_i\}$ は局所有限かつ $\mathcal{V}$ の細分で, 各 f_i は C^r 級かつ $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(p) = 1$.
各 U_i がある V_λ に含まれるので (選択公理により) 写像 $\chi : \mathbb{N} \to \Lambda$, $U_i \subset V_{\chi(i)}$ がある. このとき

$$f_\lambda(p) := \sum_{\chi(i) = \lambda} f_i(p), \qquad f_\lambda := 0 \ \ (\chi^{-1}(\lambda) = \emptyset))$$

と定めれば $\operatorname{supp} f_\lambda = \cup_{\chi(i) = \lambda} \operatorname{supp} f_i \subset \cup_{\chi(i) = \lambda} U_i \subset V_\lambda$, $\sum_\lambda f_\lambda = \sum_i f_i \equiv 1$ となる.