行列の指数関数

以下, 行列は全て m 次正方行列, E は単位行列とする. 行列 $A=(a_{ij})$ に対し, $e^A=\exp A$ を

$$e^A=\exp A:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=E+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots$$

収束性は, $\|A\|_2:=(\sum_{i,j=1}^{m}|a_{ij}|^2)^{\frac12}$, $\|A\|_1:=\sum_{i,j=1}^{m}|a_{ij}|$, $\|A\|_0:=\sup_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\|A\boldsymbol{x}\|_2$ 等の $\|AB\|\leqq\|A\|\cdot\|B\|$ をみたす norm $\|\ \|$ に対し (注 $\|A\|_\infty:=\max_{1\leqq i,j\leqq m}|a_{ij}|\Rightarrow\|AB\|_\infty\leqq m\|A\|_\infty\|B\|_\infty$) $\|A\|_1\geqq\|A\|_2\geqq\|A\|_0\geqq\|A\|_\infty$ より

$$\|e^A\|_\infty\leqq\|e^A\|\leqq\|E\|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|A\|^n}{n!}\leqq\|E\|+e^{\|A\|}<\infty.$$

よって e^A (の各成分) は収束する. さらに次をみたす: P が正則行列, $AB=BA$ (可換), $s,t\in\mathbb{R}$ とするとき

(1) $P^{-1}e^AP=e^{P^{-1}AP}$, (2) $e^Ae^B=e^{A+B}$, (3) $e^{sA}e^{tA}=e^{(s+t)A}$, (4) $\dfrac{de^{tA}}{dt}=Ae^{tA}=e^{tA}A$, (5) $\det e^A=e^{\operatorname{tr}A}>0$.

(3) と $e^O=E$ より $e^{-A}=(e^A)^{-1}$. ((1) は $(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$ より. (2) は数の指数法則と同じ. (3) は (2) より. (4) は項別微分. (5) は P で A を三角化すれば A の固有値 $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ に対し $\det e^A=\prod_i e^{\alpha_i}=e^{\sum\alpha_i}=e^{\operatorname{tr}A}$.)

定数係数線型常微分方程式 $\boldsymbol{x}$ は列ベクトルとして,

$$\text{(E1)}\qquad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\ \left(\iff \frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j,\ x_i(0)=x_i^0\ \ (i=1,\dots,m)\right)$$

は $\boldsymbol{x}(t):=e^{tA}\boldsymbol{x}_0$ とおけば $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)=Ae^{tA}\boldsymbol{x}_0=A\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ をみたし (E1) の解になる.

e^{tA} の求め方 (一般論) $P^{-1}AP$ が Jordan 標準形 J になる様 P をとると, $e^{tA}=P(P^{-1}e^{tA}P)P^{-1}=Pe^{tJ}P^{-1}$ より, まず e^{tJ} を求める. (A の固有値を $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ として, ( ) 内は A が対角化可能のとき)

$$J=\begin{bmatrix}J_1&&\\&\ddots&\\&&J_k\end{bmatrix}\Rightarrow J^n=\begin{bmatrix}J_1^n&&\\&\ddots&\\&&J_k^n\end{bmatrix}\Rightarrow e^{tJ}=\begin{bmatrix}e^{tJ_1}&&\\&\ddots&\\&&e^{tJ_k}\end{bmatrix}.\quad\left(J=\begin{bmatrix}\alpha_1&&\\&\ddots&\\&&\alpha_m\end{bmatrix}\Rightarrow e^{tJ}=\begin{bmatrix}e^{t\alpha_1}&&\\&\ddots&\\&&e^{t\alpha_m}\end{bmatrix}\right).$$

J_i が ℓ 次の Jordan 細胞で, その固有値を α とする. $J_i=\alpha E+N$, (N は冪零行列, 対角成分の右隣が 1, 他の成分は 0) と分解すると, $N^2=$ 対角成分の 2 つ右が 1, 他は 0, …, $N^{\ell-1}=(1,\ell)$ 成分のみ 1, 他は 0, $N^n=O$ $(n\geqq\ell)$. $\alpha EN=N(\alpha E)$ より $J_i^n=(\alpha E+N)^n$ を二項展開して $N^\ell=O$ を代入すれば $n\geqq\ell$ のとき, ($E=N^0$ として)

$$J_i^n=\sum_{p=0}^{n}{}_nC_p\alpha^pN^{n-p}=\sum_{p=0}^{\ell-1}{}_nC_p\alpha^{n-p}N^p.$$

$$\therefore\ e^{tJ_i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\Big(\sum_{p=0}^{\ell-1}\frac{n!}{(n-p)!p!}\alpha^{n-p}N^p\Big)=\sum_{p=0}^{\ell-1}\frac{t^p}{p!}N^p\Big(\sum_{n-p=0}^{\infty}\frac{(t\alpha)^{n-p}}{(n-p)!}\Big)=\sum_{p=0}^{\ell-1}\frac{t^p}{p!}N^pe^{t\alpha}=e^{t\alpha}\begin{bmatrix}1&t&\frac{t^2}{2!}&\cdots&\frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\\&1&t&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&\frac{t^2}{2!}\\&&&1&t\\&&&&1\end{bmatrix}.$$

特に基本解は, J_i を ℓ_i 次, 固有値を α_i として $(\ell_1+\cdots+\ell_k=m)$, $e^{t\alpha_i},te^{t\alpha_i},\dots,t^{\ell_i-1}e^{t\alpha_i}$ $(i=1,\dots,k)$ の m 個.

尚, $P=(\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_m)$ は $AP=PJ=(\alpha_1\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_1+\alpha_1\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2+\alpha_1\boldsymbol{p}_3,\cdots)$ より $A\boldsymbol{p}_1=\alpha_1\boldsymbol{p}_1$, $A\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1+\alpha_1\boldsymbol{p}_2,\dots$. 即ち, Jordan 細胞 1 個につき固有ベクトルが 1 個, $\boldsymbol{p}_1$ が求まり, $\boldsymbol{p}_2$ は方程式 $(A-\alpha_1E)\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1$ の解, $(A-\alpha_1E)\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}_{i-1}$ として求められる. (逆に, $\boldsymbol{p}_{\ell_1}$ が求まると $\boldsymbol{p}_i=(A-\alpha_1E)\boldsymbol{p}_{i+1}$ として逆順に $\boldsymbol{p}_i$ が求まる.)

A が実行列の場合, 固有多項式 $f_A(x)$ は実係数なので $\overline{f_A(x)}=f_A(\bar{x})$. 従って固有方程式 $f_A(x)=0$ が虚根 $\alpha\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ をもてば複素共役 $\bar\alpha$ も根になる. $\alpha\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ のとき, 固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ $(\neq\boldsymbol{0})$ に対し $\boldsymbol{0}=\overline{(A-\alpha E)\boldsymbol{p}}=(A-\bar\alpha E)\bar{\boldsymbol{p}}$ より $\bar{\boldsymbol{p}}$ は $\bar\alpha$ に対する固有ベクトルになる. $\boldsymbol{p}$ を実部と虚部に分けて $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}+i\boldsymbol{q}'$ $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}'\in\mathbb{R}^m)$ と表すと, $\alpha\neq\bar\alpha$ より $\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{p}}$ は一次独立なので $\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}'$ も一次独立. このとき $\alpha=a-ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ とすると, $A\boldsymbol{q}=a\boldsymbol{q}+b\boldsymbol{q}'$, $A\boldsymbol{q}'=a\boldsymbol{q}'-b\boldsymbol{q}$:

$$A(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{p}})=(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{p}})\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\bar\alpha\end{bmatrix}\Leftrightarrow A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}')=(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}')\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix},\quad(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}')=(\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{p}})\begin{bmatrix}1&-i\\1&i\end{bmatrix}\frac12,\ (\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{p}})=(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}')\begin{bmatrix}1&1\\i&-i\end{bmatrix}.$$

$J'=\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}=aE+bN'$, $N'=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ とおくとき, $e^{J't}$ は この基底変換を用いると次の様になる:

$$e^{J't}=e^{at}\begin{bmatrix}\cos bt&-\sin bt\\\sin bt&\cos bt\end{bmatrix}\iff\begin{bmatrix}e^{\alpha t}&0\\0&e^{\bar\alpha t}\end{bmatrix}\quad\begin{cases}e^{\alpha t}=e^{at}e^{-ibt}=e^{at}(\cos bt-i\sin bt)\\e^{\bar\alpha t}=e^{at}e^{ibt}\ \ =e^{at}(\cos bt+i\sin bt)\end{cases}.$$

尚, $e^{J't}=e^{(aE+bN')t}=e^{at}e^{N'bt}$, $N'^2=-E$, $N'^3=-N'$, $N'^4=E$ より直接 $e^{N'bt}$ を計算しても良い:

$$e^{N'bt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(bt)^{2n}}{(2n)!}E+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(bt)^{2n+1}}{(2n+1)!}N'=(\cos bt)E+(\sin bt)N'=\begin{bmatrix}\cos bt&-\sin bt\\\sin bt&\cos bt\end{bmatrix}.$$

実 2 次行列の指数関数

$a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha = a - ib$ $(b \neq 0)$ とする．2 次実正方行列 A の Jordan 標準形 J, 実標準形 J' は次のいずれか:

(1) $J = J' = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ($a = b$ を含む.) (2) $J = J' = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ (3) $J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$, $J' = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

(固有多項式が $(x-a)(x-b)$, $(x-a)^2$, $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2-2ax+a^2+b^2$ のいずれか.)

(1) で $a = b$ のときは $J = aE$ より $A = aE$, $\therefore$ $e^{At} = e^{at}E$.

他の場合でも $A = J'$ の時は,

(1) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{bmatrix}$ (2) $e^{At} = e^{at}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $e^{At} = e^{at}\begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}$

$A \neq J'$ のとき

(1) で $a \neq b$ のときは a, b に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ とし，$P = (\boldsymbol{p}_1\, \boldsymbol{p}_2)$ とすると，$P^{-1}AP = J'$,
$e^{J't} = e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^{At}P$ なので $e^{At} = Pe^{J't}P^{-1}$ として e^{At} が求められる.

($a = b$ のとき $J' = aE$ なので $A = aE = J'$ となる.)

(2) a に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1$ とし, $(A - aE)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_1$ の解を $\boldsymbol{p}_2$, $P = (\boldsymbol{p}_1\, \boldsymbol{p}_2)$ とすると $e^{At} = Pe^{J't}P^{-1}$.

(3) $\alpha = a - ib$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} + i\boldsymbol{q}'$ $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}' \in \mathbb{R}^2)$, $Q = (\boldsymbol{q}\, \boldsymbol{q}')$ とすると (α の虚部を $-$ にしている)

$$e^{At} = Qe^{J't}Q^{-1} = e^{at}Q\begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}Q^{-1}.$$

実 3 次行列の場合: 一般に奇数次の行列は実固有値を必ず持つので, 実標準形は, (4) 3 次の Jordan 細胞が 1 つ．又は 実固有値に対する 1 次元の固有空間の直和因子を除けば 2 次の場合に帰着される.

$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場と積分曲線 $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 X と積分曲線の微分方程式は

$$X = X_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + X_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{dx}{dt} = X_1(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = X_2(x,y) \iff \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(x,y) \\ X_2(x,y) \end{bmatrix}.$$

場合 1: (線型の場合) 初期値を $t = 0$ のとき $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0)$ とすると

$$X = (ax + by)\frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}.$$

A を正則行列 P により実標準形 $J' = P^{-1}AP$ にして，$\boldsymbol{x} = Pe^{J't}P^{-1}\boldsymbol{x}_0$ が解になる．特に,

$$X = (ax-by)\frac{\partial}{\partial x} + (bx+ay)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{at}\begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

場合 2: (X_1 が x のみ, X_2 が y のみの関数 $X_1(x)$, $X_2(y)$ のとき)

$$X = X_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + X_2(y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{dx}{dt} = X_1(x), \quad \frac{dy}{dt} = X_2(y)$$

この時はそれぞれの方程式を解けば良い.

$$\frac{dx}{dt} = X_1(x) \implies \int \frac{dx}{X_1(x)} = \int dt = t + C \qquad (C \text{ は積分定数, 初期値を代入して定める}).$$

従って $\displaystyle\int \frac{dx}{X_1(x)}$ が求まればこれを x について解けば解を得る．例えば

$X_1 = x \implies \displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| = t + C_1 \implies x(t) = Ce^t$ $(C = \pm e^{C_1}$, 又は 0 より) $C \in \mathbb{R}$. (場合 1 の (1).)

$X_1 = x^2 \implies \displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} = t + C \implies x = \frac{-1}{t + C}.$

(微分方程式は一般には解くのは難しいが, 解けるものも多い．詳しくは微分方程式の教科書等を参照のこと.)