ベクトル場

M の各点 p に, p 上の接ベクトル $X(p) \in T_pM$ を対応させる C^s 級写像 $(0 \leqq s \leqq r-1)$

$$X : M \to TM, \quad X(p) =: X_p \in T_pM. \qquad \therefore\ \pi \circ X = 1_M \qquad \text{(図)}$$

を C^r 級多様体 M の C^s 級**接ベクトル場 (tangent vector field)**, 略して **ベクトル場 (vector field)** という.

局所基底表示, 局所座標表示 M の (C^r 級) 座標近傍を $(U, \varphi) = (U, \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = \varphi(p)$ とするとき $X(p) = X_p$ は局所基底 $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p$ の一次結合で表された:

$$X(p) = X_p = \sum_{i=1}^m X_i(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p, \qquad X_i : U \to \mathbb{R}.$$

(この係数 X_i は p によって定まるので U 上の関数になる.) X を局所座標系 $(U, \varphi), (TU, \Phi)$ を用いて表示すると,

$$\Phi \circ X \circ \varphi^{-1}(\boldsymbol{x}) = \Phi\Big(\sum_{i=1}^m X_i(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p\Big) = (\varphi(p), (X_1(p), \ldots, X_m(p))) =: (\boldsymbol{x}, (X_1'(\boldsymbol{x}), \ldots, X_m'(\boldsymbol{x}))),$$

$\forall\, X_i'(\boldsymbol{x}) := X_i \circ \varphi^{-1}(\boldsymbol{x}) = X_i(p)$ が ($\boldsymbol{x}$ に関し) C^s 級 $\Leftrightarrow X$ が C^s 級. $f \in C^s(p)$ に対し $f' := f \circ \varphi^{-1}$ とすると

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^m X_i(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p f \underset{T1''}{=} \sum_{i=1}^m X_i(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{\boldsymbol{x}} f' = \sum_{i=1}^m X_i'(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{\boldsymbol{x}} f' =: X_{\boldsymbol{x}}'(f')$$

$X'(\boldsymbol{x}) := X_{\boldsymbol{x}}'$ とすると X' は U' 上の, $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ は U 又は U' 上の (C^s 級)(局所) ベクトル場になる.

• この様に, ベクトル場は多様体より微分可能性が下がり, 以下の演算により更に微分可能性が下がることにより微分可能性に関する記述が煩雑になる. そこで以下では多様体, 多様体間の写像, ベクトル場は全て C^∞ **級**とする. (M が N の部分多様体のとき $X : M \to TN$, $\pi \circ X = 1_M$ となる X は $X(p) \in T_pM$ とは限らないが, この X も M 上のベクトル場という. 一般に, (C^0) 全射 $\pi : E \to M$ に対し $s : M \to E$ で $\pi \circ s = 1_M$ をみたす写像 s を切断 ((cross) section) というが, ベクトル場も section の一種である.)

ベクトル場の演算 $C^\infty(M)$ で M 上の C^∞ 級関数全体を表す. このとき $f \in C^\infty(p)$ $(\forall\, p \in M)$.
関数 $f : M \to \mathbb{R}$ $(\in C^\infty(M))$ に対し関数 $Xf \in C^\infty(M)$ (X による f の **微分**という) を次式で定める:

$$(Xf)(p) := X_p(f)$$

(U, φ) 上で局所座標表示すれば (下式右辺が C^∞ 級 $\Leftrightarrow Xf$ が C^∞ 級.) (M, f が C^r 級なら Xf は C^{r-1} 級以下.)

$$(Xf)(p) := X_p(f) \underset{(*)}{=} X_{\boldsymbol{x}}'(f') = \sum_{i=1}^m X_i'(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{\boldsymbol{x}} f' = \sum_{i=1}^m X_i'(\boldsymbol{x})\frac{\partial f'}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

このとき $f, g \in C^\infty(M)$, $a \in \mathbb{R}$ に対し次の derivation property が成り立つ: (p を代入すれば X_p の微分性より.)

$$X(af) = a \cdot Xf, \quad X(f+g) = Xf + Xg \ \text{(線形性)}, \qquad X(fg) = (Xf) \cdot g + f \cdot (Xg) \ \text{(積公式)}.$$

C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル場全体を $\mathcal{X}(M)$, $\mathcal{X}^\infty(M)$ と表す.

$$\mathcal{X}(M) = \mathcal{X}^\infty(M) := \{X : M \to TM \mid \pi \circ X = 1_M\ , X \text{ は } C^\infty \text{ 級}\}.$$

$X^0 \in \mathcal{X}(M)$ を $X^0(p) = 0 \in T_pM$ と定め, 単に 0 で表す.
ベクトル場 $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ と 関数 $f \in C^\infty(M)$ に対し和 $X + Y$, 関数倍 fX $(X + Y, fX \in \mathcal{X}(M))$ を,

$$(X+Y)(p) := X_p + Y_p, \qquad (fX)(p) := f(p) \cdot X_p$$

で定める. このとき次 (の結合, 交換, 分配律) が成り立つ. (p を代入すれば T_pM が線型空間になることによる.)

$$X+Y = Y+X, \ (X+Y)+Z = X+(Y+Z), \ f(gX) = (fg) \cdot X, \ f(X+Y) = fX+fY, \ (f+g)X = fX+gX.$$

(• $C^\infty(M)$ は関数の和, 積により可換環になるが, この式により $\mathcal{X}(M)$ は $C^\infty(M)$ 上の加群になる. 特に, 実数 a と定数関数 f_a を同一視することにより, $\mathcal{X}(M)$ は実ベクトル空間になる.)
(注) $fX \in \mathcal{X}(M)$, $Xf \in C^\infty(M)$ なので $fX \neq Xf$.

括弧積 (Lie bracket, 交換子積) ベクトル場 $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対し, $[X, Y]$ $(\in \mathcal{X}(M))$ を, $f \in C^\infty(p)$ に対し,

$$[X, Y](p)(f) = [X, Y]_p f := X_p(Y|_{U_f} f) - Y_p(X|_{U_f} f). \qquad (f \in C^\infty(M)) \text{ のときは } X_p(Yf) - Y_p(Xf).)$$

これを $(U, \varphi) = (U, \boldsymbol{x})$, $p \in U \subset U_f$ で局所表示して, $Y_p = \sum_{i=1}^m Y_i(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ とすれば

$$X_p(Yf) = X_{\boldsymbol{x}}'\Big(\sum_{i=1}^m Y_i'\frac{\partial f'}{\partial x_i}\Big) = \sum_{j=1}^m X_j'(\boldsymbol{x})\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}}\Big(\sum_{i=1}^m Y_i'\frac{\partial f'}{\partial x_i}\Big) = \sum_{i,j=1}^m X_j'\frac{\partial Y_i'}{\partial x_j}\frac{\partial f'}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i,j=1}^m X_j'Y_i'\frac{\partial^2 f'}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

同様に

$$Y_p(Xf) = \sum_{i,j=1}^m Y_i'\frac{\partial X_j'}{\partial x_i}\frac{\partial f'}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i,j=1}^m Y_i'X_j'\frac{\partial^2 f'}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}). \qquad \frac{\partial^2 f'}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f'}{\partial x_i \partial x_j} \ \text{より } (\boldsymbol{x} \text{ を略して})$$

$$X_p(Yf) - Y_p(Xf) = \sum_{i,j=1}^m X_j'\frac{\partial Y_i'}{\partial x_j}\frac{\partial f'}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^m Y_i'\frac{\partial X_j'}{\partial x_i}\frac{\partial f'}{\partial x_j} \underset{\text{第2項}\, i \leftrightarrow j}{=} \sum_{i,j=1}^m \Big(X_j'\frac{\partial Y_i'}{\partial x_j} - Y_j'\frac{\partial X_i'}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial f'}{\partial x_i}. \ \text{よって}$$

$$\text{(VF1)} \qquad [X, Y]_p f = \sum_{i=1}^m \Big\{\sum_{j=1}^m X_j'\frac{\partial Y_i'}{\partial x_j} - Y_j'\frac{\partial X_i'}{\partial x_j}\Big\}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{\boldsymbol{x}} f' = \sum_{i=1}^m \Big\{\sum_{j=1}^m X_j'\frac{\partial Y_i'}{\partial x_j} - Y_j'\frac{\partial X_i'}{\partial x_j}\Big\}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p f.$$

これより $[X,Y]_p \in T_pM$ で, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\Big(X'_j\frac{\partial Y'_i}{\partial x_j} - Y'_j\frac{\partial X'_i}{\partial x_j}\Big) \in C^\infty(U')$ より $[X,Y] \in \mathcal{X}(M)$.

括弧積 [,] は (正方行列の交換子積 $[A,B] := AB - BA$ と同様に) 次の性質をもつ:

$X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$, $f,g \in C^\infty(M)$, $a,b \in \mathbb{R}$ に対し,

(複零律) $[X,X]=0$, (これより) (交代性) $[Y,X] = -[X,Y]$.

(双線形性) $[X,Y+Z] = [X,Y]+[X,Z]$, $[X+Y,Z] = [X,Z]+[Y,Z]$, $[aX,bY] = ab[X,Y]$.

(Jacobi 律) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.

(微分性) $[fX,gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.

一般に 複零律, 双線形性, Jacobi 律 (Jacobi 恒等式) をみたす括弧積 [,] をもつベクトル空間 (より一般に 1 をもつ可換環上の加群) を Lie algebra (Lie 環, Lie 代数) という. $\mathcal{X}(M)$ は ($\mathbb{R}$ 上の) リー環になる.

ベクトル場の積分曲線 曲線 $\gamma : (a,b) \to M$ に対し, (速度ベクトル場) $\Big(\dfrac{d\gamma}{dt}\Big)_t = d\gamma_t\Big(\dfrac{d}{dt}\Big)_t \in T_{\gamma(t)}M$ の様に,

$$\tilde\gamma : (a,b) \to TM, \quad \tilde\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M, \qquad \therefore\ \pi\circ\tilde\gamma = \gamma$$

となる (C^∞ 級) 写像 $\tilde\gamma$ を γ に **沿うベクトル場** (vector field along γ) という. M 上のベクトル場 $X \in \mathcal{X}(M)$ に対し, $X\circ\gamma$ ($(X\circ\gamma)(t) = X_{\gamma(t)}$) も γ に沿うベクトル場になる. これらの, 座標近傍 $(U,\varphi) = (U,\boldsymbol{x})$ に関する局所表示は, $\gamma'(t) := (\varphi\circ\gamma)(t) = \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t),\dots,x_m(t))$ とするとき (T1) を平行移動して考えれば,

$$\Big(\frac{d\gamma}{dt}\Big)_t = \sum_{i=1}^m \frac{dx_i}{dt}(t)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{\gamma(t)}, \quad X_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^m X_i(\gamma(t))\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^m X'_i(\boldsymbol{x}(t))\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{\gamma(t)}.$$

$f \in C^\infty(M)$ のこれらによる微分は, $f' := f\circ\varphi^{-1}$ として,

$$\Big(\frac{d\gamma}{dt}\Big)_t f = \sum_{i=1}^m \frac{dx_i}{dt}(t)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{\gamma(t)} f = \sum_{i=1}^m \frac{dx_i}{dt}(t)\frac{\partial f'}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}(t)), \quad X_{\gamma(t)}f = \sum_{i=1}^m X'_i(\boldsymbol{x}(t))\frac{\partial f'}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}(t)).$$

与えられたベクトル場 $X \in \mathcal{X}(M)$ に対し, $\Big(\dfrac{d\gamma}{dt}\Big)_t = X_{\gamma(t)}$ となる曲線 γ が存在するとき, γ を X の**積分曲線** という. このとき, 上の局所表示を見れば

$$\Big(\frac{d\gamma}{dt}\Big)_t = X_{\gamma(t)} \iff \frac{dx_i}{dt}(t) = X'_i(\boldsymbol{x}(t)) = X'_i(x_1(t),\dots,x_m(t))\ (i=1,\dots,m)\ \Big(\Leftrightarrow \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = X'(\boldsymbol{x}(t))\Big) \quad \cdots \text{(D1)}.$$

右の式は常微分方程式系になっている. 従って常微分方程式の基礎定理 (解の存在と一意性) により, 任意の点 $p \in M$ を通る (C^∞ 級) 積分曲線が存在するが, それを次の形で引用する. (補足参照)

まず, $p \in M$ を含む座標近傍 $(U,\varphi : U \to U') = (U,\boldsymbol{x})$ をとり, $\varphi(p) = \boldsymbol{x}_0$ とする. $X'_i(\boldsymbol{x})$ は陽に t を含まないので $X'_i(\boldsymbol{x})$ は $\mathbb{R}\times U'$ 上定義されていて C^∞ 級である. このとき

基礎定理 任意の $t_0 \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{x}_0 \in U'$ に対し, t_0 の ε 近傍 $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$, $\boldsymbol{x}_0$ の近傍 $W' \subset U'$, および C^∞ 級写像 $\gamma' : (t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\times W' \to U'$, $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}') := \gamma'(t,\boldsymbol{x}')$ が存在して, $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}')$ は

$$\text{(D1)} \quad \frac{dx_i}{dt}(t) = X'_i(\boldsymbol{x}(t)),\ (i=1,\dots,m) \qquad \text{(初期値)}\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}'$$

をみたす ((D1) の解である). 更に ε, W' を定めれば この様な γ' は一意的ある.

$t_0 = 0$, $I_\varepsilon = (-\varepsilon,\varepsilon)$ のときを考える. $t,s,t+s \in I_\varepsilon$, $\boldsymbol{x}(s,\boldsymbol{x}') \in W'$ のとき, $\boldsymbol{x}(s,\boldsymbol{x}')$ を初期値とする (D1) の解 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}(s,\boldsymbol{x}'))$ と, $\boldsymbol{x}(t+s,\boldsymbol{x}')$ は共に $t=0$ のとき同じ値 $\boldsymbol{x}(s,\boldsymbol{x}')$ を取るので, 解の一意性より

$$t,s,t+s \in I_\varepsilon,\ \boldsymbol{x}(s,\boldsymbol{x}') \in W' \implies \boldsymbol{x}(t+s,\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}(s,\boldsymbol{x}')) \quad (\Leftrightarrow \gamma'(t+s,\boldsymbol{x}') = \gamma'(t,\gamma'(s,\boldsymbol{x}'))).$$

$\gamma'_t(\boldsymbol{x}') := \gamma'(t,\boldsymbol{x}')$, $\gamma'_t : W' \to U'$ とおくと C^∞ 級写像で, ($\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}') \in W'$ のときは t と s を入れ替えれば)

$$\gamma'_{t+s} = \gamma'_t\circ\gamma'_s\ (= \gamma'_s\circ\gamma'_t), \qquad \gamma'_0 = 1_{W'} \quad (\iff \boldsymbol{x}(0,\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}').$$

$t+s=0$ のとき $1_{W'} = \gamma'_0 = \gamma'_{-s}\circ\gamma'_s$. 即ち $\gamma'_s : W' \to \gamma'_s(W')$ は (C^∞ 級) 微分同相.

これらを φ^{-1} により $U \subset M$ 上に移す, 即ち $W := \varphi^{-1}(W')$, $\gamma(t,q) := \varphi^{-1}(\gamma'(t,\varphi(q)))$ としてして次を得た:

定理 1 M を C^∞ 級多様体, X を M 上の C^∞ 級ベクトル場 ($X \in \mathcal{X}(M)$) とする. このとき, 任意の点 $p \in M$ に対し, p の開近傍 $W = W_p$, $\varepsilon = \varepsilon_p > 0$, 及び C^∞ 級写像 $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon)\times W \to M$ が存在して, 全ての $q \in W$ に対し

$$\text{(D2)} \qquad \Big(\frac{d\gamma}{dt}\Big)_{(t,q)} = X(\gamma(t,q)), \qquad \gamma(0,q) = q$$

が成り立つ. (ここで γ は q を通る曲線と考えている.) 更に, $s,t,t+s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ に対し $\gamma(s,q) \in W$ ならば

$$\gamma(t+s,q) = \gamma(t,\gamma(s,q))) \qquad (\gamma_{t+s} = \gamma_t\circ\gamma_s,\ \gamma_0 = 1_W\ \ (\gamma_t(q) := \gamma(t,q))).$$

ε, W を定めれば この様な γ は一意的に定まる.

解の一意性より常微分方程式の 2 つの解はある点で値が一致すれば定義域の共通部分で解が一致し, 和集合に解を延長できて, 極大延長解が存在する (補足:注 4). これにより $\gamma : O \to M$ の定義域 O は $\cup_{p\in M} I_{\varepsilon_p}\times W_p$ を含む $\{0\}\times M \subset \mathbb{R}\times M$ の開近傍で, $O \cap (\mathbb{R}\times\{q\})$ $(q \in M)$ は 初期値 $\gamma(0,q) = q$ の極大解の定義域である開区間となる.

1 parameter 変換群 $\gamma : O \to M$ の定義域 O が $O = \mathbb{R}\times M$ に取れる, 即ち, $\forall s,t \in \mathbb{R},\ q \in M$ に対し,

$$\gamma : \mathbb{R}\times M \to M\ (C^\infty),\quad \gamma(t+s,q) = \gamma(t,\gamma(s,q)),\ \gamma(0,q) = q \quad (\gamma_{t+s} = \gamma_t\circ\gamma_s,\ \gamma_0 = 1_M\ \ (\gamma_t(q) := \gamma(t,q)))$$

となるとき ベクトル場 X は**完備**といい, $\gamma : \mathbb{R}\times M \to M$ を **1 parameter 変換群**という. これは (Lie 群) $\mathbb{R}$ (加法群) の M への C^∞ 級作用を与えている (のでこう呼ぶ). $\gamma_{-t} = (\gamma_t)^{-1}$ なので γ_t は微分同相で $t \mapsto \gamma_t$ は準同型.

逆に, C^∞ 級写像 $\gamma : \mathbb{R}\times M \to M$ で, $\gamma(t+s,q) = \gamma(t,\gamma(s,q)),\ \gamma(0,q) = q\ (\forall s,t \in \mathbb{R},\ q \in M)$ となるものが与えられたとき, $p \in M$ に対し,

$$X(p) = X_p := \frac{d\gamma(t,p)}{dt}\Big|_{t=0} \in T_pM$$

と定めれば X は (C^∞ 級) ベクトル場になり, この積分曲線が γ になる. 即ち,

完備ベクトル場 $\longleftrightarrow$ 1 parameter 変換群 (一対一に対応).

指数写像 (exponential map) 完備ベクトル場 X に対応する 1 parameter 変換群 γ は次の様に表される:

$$\gamma_t = \operatorname{Exp} tX, \qquad \gamma(t,p) = (\operatorname{Exp} tX)(p) = \operatorname{Exp}_p tX.$$

補題 (完備性) ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 前定理における ε_p が $\varepsilon_p \geqq \varepsilon$ ととれる, 即ち, $I_\varepsilon\times M$ 上積分曲線 γ が存在するとき ($I_\varepsilon\times M \subset O$) ベクトル場 X は完備である. (当然逆も成り立つ.)

($\because$) 帰納法: $\forall p \in M$ について, $I(2^n\varepsilon) := I_{2^n\varepsilon} = (-2^n\varepsilon, 2^n\varepsilon)$ 上解が存在すると仮定して $I(2^{n+1}\varepsilon)$ 上解が存在する事を示す. $n = 0$ のときは補題の仮定により成立. $|t| < 2^{n+1}\varepsilon \Rightarrow |t/2| < 2^n\varepsilon$ より $\gamma(t/2,p),\ \gamma(t/2,\gamma(t/2,p))$ はともに定義されていて $\gamma(t/2,p) = \gamma(0,\gamma(t/2,p))$. よって解の一意性 (延長定理) により $\gamma(t/2,\gamma(t/2,p)) = \gamma(t,p)$, 即ち $t \in I(2^{n+1}\varepsilon)$ まで解が延長される (帰納法終). $\cup_{n=0}^\infty I(2^n\varepsilon) = \mathbb{R}$ より $\mathbb{R}\times M$ 上 γ が定義され, X は完備.

- ベクトル場 X や関数 f に対し $X,\ f$ の **support (台)** $\operatorname{supp} X,\ \operatorname{supp} f$ を, $^-$ は閉包を表すとして,

$$\operatorname{supp} X := \overline{\{p \in M \mid X(p) \neq 0\}}, \qquad \operatorname{supp} f := \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}$$

と定める. $\operatorname{supp} X,\ \operatorname{supp} f$ がコンパクトのとき, $X,\ f$ は compact support をもつともいう.

$X(p) = 0$ となる点 p では (対応する方程式は $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ より $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}_0$ で) $\gamma(t,p) \equiv p\ (\forall t \in \mathbb{R})$.

系 ベクトル場 X の台がコンパクトなら X は完備. 特に閉 (=コンパクト) 多様体上のベクトル場は完備である.

($\because$) $S := \operatorname{supp} X$ とおく. 各 $p \in S$ に対し定理 1 の $W_p,\ \varepsilon_p$ を取ると $\{W_p\}_{p\in S}$ は S の開被覆. S はコンパクトより有限部分被覆 $\{W_{p_i}\}_{i=1}^k$ が存在する. このとき, $\varepsilon := \min_i \varepsilon_{p_i}$ とおけば ($p \in M\backslash S$ では $\varepsilon_p = \infty$ なので) 上の補題により X は完備となる.

(行列の指数関数のプリント参照)

例 1 $A = (a_{ij})$ を m 次正方行列とするとき, 次の $\mathbb{R}^m$ 上のベクトル場 X とその積分曲線の微分方程式

$$X = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \Longrightarrow \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j\ \ (i = 1,\ldots,m) \iff \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$$

に対する 1 parameter 変換群 $\operatorname{Exp} tX$ は ($\boldsymbol{x}_0$ は列ベクトルとして)

$$(\operatorname{Exp} tX)(\boldsymbol{x}_0) = (\exp tA)\boldsymbol{x}_0 = e^{tA}\boldsymbol{x}_0 \qquad (\text{右辺は行列の指数関数})$$

Lie 群上の左不変ベクトル場 G を Lie 群, $e \in G$ を単位元, $L_g : G \to G,\ L_g(h) := gh$ を左移動とする (L_g は C^∞ 微分同相で $L_{g^{-1}}$ が逆写像). G 上のベクトル場 X が

$$dL_g X(h) = X(gh) \quad (g, h \in G) \quad (\iff X(h) = (dL_g X)(g^{-1}h) =: (dL_g X)(L_g^{-1}h)\ )$$

をみたすとき X は**左不変** (left invariant) という. 左不変ベクトル場 X は $X(e) \in T_eG$ により $X(g) = dL_g X(e)$ と一意的に表され, G 上の左不変ベクトル場全体を $\mathfrak{g}$ と表せば $\mathfrak{g} \cong T_eG\ (X \mapsto X(e) = X_e)$.
($\mathfrak{g}$ はリー群 G のリー環といわれる.)

$GL(n,\mathbb{R})$ のリー環と指数写像 $G := GL(n,\mathbb{R})$ とし, n 次正方実行列全体 $M(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ の標準座標系を行列の形で表して $\boldsymbol{x} = (x_{ij})$ とする. G はその開部分多様体で, (これまでの記号と合わせる為に) 大域座標系を $\varphi\ (= 1_G) = (\varphi_{ij})$ とする. ($g = (g_{ij}) \in G \Rightarrow \varphi_{k\ell}(g) = g_{k\ell}$.) 単位元 $e = E$ の接空間において $T_eG \cong M(n,\mathbb{R})$ は

$$T_eG = \Big\{ X(e) = X^A(e) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \Big(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big)_e \mid A = (a_{ij}) \in M(n,\mathbb{R}) \Big\} \longleftrightarrow A \in M(n,\mathbb{R}).$$

$X(g) =: \displaystyle\sum_{i,j=1}^n X_{ij}^g \Big(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big)_g$ とすると, $X(g)\varphi_{k\ell} = \displaystyle\sum_{i,j=1}^n X_{ij}^g \Big(\frac{\partial x_{k\ell}}{\partial x_{ij}}\Big)_g = X_{k\ell}^g$. 一方, $X(g)f = X_e(f \circ L_g)$ より,

$$X_e(\varphi_{k\ell} \circ L_g) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \Big(\frac{\partial \varphi_{k\ell}(g\boldsymbol{x})}{\partial x_{ij}}\Big)_e = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial (\sum_{s=1}^n g_{ks} x_{s\ell})}{\partial x_{ij}}(e) \underset{j=\ell}{\underset{i=s}{=}} \sum a_{i\ell} g_{ki} = \sum_{i=1}^n g_{ki} a_{i\ell} = (gA)_{k\ell}.$$

($(gA)_{k\ell}$ は gA の (k,ℓ) 成分.) よって $X_{ij}^g = (gA)_{ij}$. $X(g)$ および $X = X(\boldsymbol{x})$ は

$$X(g) = \sum_{i,j=1}^n (gA)_{ij} \Big(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big)_g, \qquad X = X(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^n (\boldsymbol{x}A)_{ij} \Big(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big) = \sum_{i,j,k=1}^n x_{ik} a_{kj} \Big(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big).$$

$A, B \in M(n,\mathbb{R})$ に対し $[X^A, X^B]$ は 局所表示の式 (VF1) より, ($i \mapsto i, j,\ j \mapsto k, \ell,\ B = (b_{ij})$ として)

$$[X^A, X^B] = \sum_{i,j=1}^n (\boldsymbol{x}A)_{ij} \Big(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \sum_{k,\ell,s=1}^n x_{k,s} b_{s\ell}\Big) \frac{\partial}{\partial x_{k\ell}} - \sum_{i,j=1}^n (\boldsymbol{x}B)_{ij} \Big(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \sum_{k,\ell,s=1}^n x_{k,s} a_{s\ell}\Big) \frac{\partial}{\partial x_{k\ell}}$$

$$= \sum_{i,j,k,\ell,s=1}^n \Big((\boldsymbol{x}A)_{ij} \delta_{ik} \delta_{js} b_{s\ell} - (\boldsymbol{x}B)_{ij} \delta_{ik} \delta_{js} a_{s\ell}\Big) \frac{\partial}{\partial x_{k\ell}} \underset{i=k,s=j}{=} \sum_{j,k,\ell=1}^n \Big((\boldsymbol{x}A)_{kj} b_{j\ell} - (\boldsymbol{x}B)_{kj} a_{j\ell}\Big) \frac{\partial}{\partial x_{k\ell}}$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^n (\boldsymbol{x}(AB - BA))_{k\ell} \frac{\partial}{\partial x_{k\ell}} = \sum_{k,\ell=1}^n (\boldsymbol{x}\,[A,B])_{k\ell} \frac{\partial}{\partial x_{k\ell}} = X^{[A,B]} \quad ([A,B] := AB - BA).$$

$$\text{(VF2)} \qquad [X^A, X^B] = X^{[A,B]}, \quad [X^A, X^B](e) = X^{[A,B]}(e) = \sum_{k,\ell=1}^n ([A,B])_{k\ell} \frac{\partial}{\partial x_{k\ell}} \longleftrightarrow [A,B] \in M(n,\mathbb{R})$$

$M(n,\mathbb{R})$ は交換子積 $[A,B] := AB - BA$ によりリー環になるが, $G = GL(n,\mathbb{R})$ のときそのリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ は $M(n,\mathbb{R})$ とリー環として同型である.

左不変ベクトル場 $X = X^A$ の積分曲線の微分方程式は, 初期値を $e = E$ とすると,

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = (\boldsymbol{x}A)_{ij} = \sum_k^n x_{ik} a_{kj} \quad (i,j = 1, \ldots, n), \quad \boldsymbol{x}(0) = e = E \iff \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}A,\ \boldsymbol{x}(0) = E.$$

ここで, $\boldsymbol{x}(t) := e^{tA}\ (\boldsymbol{x}(0) = E)$ は $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = Ae^{tA} = e^{tA}A = \boldsymbol{x}A$ より解になる. 即ち,

$$(\operatorname{Exp} tX^A)(e) = e^{tA} = \exp tA \qquad ((\operatorname{Exp} tX^A)(B) = B \exp tA).$$

各 $A \in M(n.\mathbb{R})$ に対し, $\gamma(t) := e^{tA} = \exp tA$ は, $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$ より $\mathbb{R}$ から G への準同型になり, G の **1 パラメーター部分群** といわれる. また, $t = 1$ とすると, $X \to \exp X$ は写像

$$\exp : \mathfrak{g} \to G \qquad (\exp : M(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}))$$

を与えるが, これを **指数写像 (exponential map)** という. (この像は ($M(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ が連結より) 連結.)
(注: G の単位元の連結成分 G_0 は閉部分群になるが, そのリー環は $T_eG = T_eG_0$ より G のリー環と一致する.)
注 $G = GL(n,\mathbb{R})$ のときは, 単位行列 E の近傍 $V = \{E + A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \|A\|_0 < 1\}$ からの exp の逆写像 $\log : V \to M(n,\mathbb{R}),\ \log(E+A) := \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{1}{k} A^k$ が存在するが, 一般のリー群においても exp の $0 \in \mathfrak{g}$ における微分 $d\exp_0$ が正則であることが分かり, exp は $0 \in \mathfrak{g}$ の開近傍から $e \in G$ の開近傍への微分同相を与える.

直交群 $O(n)$ ($SO(n)$) のリー環 $\mathfrak{o}(n)$ $O(n) := \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^t g\, g = e\}$ ($\therefore\ g^{-1} = {}^t g$) において $e^{tA} \in O(n)$, ($A \in M(n,\mathbb{R})$) とすると, ${}^t(e^{tA}) = e^{{}^tAt}$, $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ より $e^{-tA} = e^{{}^tAt}$. $\therefore\ -At = {}^tAt,\ -A = {}^tA$.
$\mathfrak{o}(n) := \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$ (n 次交代行列全体) とおけば $e^A \in O(n) \Rightarrow A \in \mathfrak{o}(n)$. 逆に, $A \in \mathfrak{o}(n)$ に対し, $(\exp A)^{-1} = \exp -A = \exp {}^tA = {}^t(\exp A)$ より $\exp A \in SO(n) = O(n)_0$. また, $A, B \in \mathfrak{o}(n)$ に対し

$${}^t[A,B] = {}^t(AB - BA) = {}^tB\,{}^tA - {}^tA\,{}^tB = (-B)(-A) - (-A)(-B) = -(AB - BA) = -[A,B]. \ \therefore\ [A,B] \in \mathfrak{o}(n)$$

より $\mathfrak{o}(n)$ は $O(n)$ ($SO(n)$) のリー環になる.