接ベクトル束 $TM = T(M) := \bigcup_{p\in M} T_pM$ を M の **接 (ベクトル) 束 (tangent (vector) bundle)** といい, 写像

$$\pi : TM \to M, \quad \pi(T_pM) = \{p\}\ (p \in M)$$

を **(束) 射影** ((bundle) projection) という (接ベクトルに, 接ベクトルの「足」を対応させる写像.) 接束はしばしば $\pi : TM \to M$ と表される. M の座標近傍 $(U, \varphi : U \to U') = (U; x_1, \dots, x_m)$ について,

$$\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)_p = \Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)_p,\ \Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)_p,\ \dots,\ \Big(\frac{\partial}{\partial x_m}\Big)_p\Big)$$

は $\forall p \in U$ に対し $T_pU = T_pM$ の基底になる. U 上の接束 $TU = \bigcup_{p\in U} T_pU = \bigcup_{p\in U} T_pM = \pi^{-1}(U)$ $(=: TM|_U)$ は, $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1 \cdots a_m) \in \mathbb{R}^m$ とするとき, φ により定まる写像

(i) $$\Phi : TU \to U'\times\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m}, \qquad \Phi\Big(\sum_{i=1}^m a_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p\Big) = \Big(\varphi(p),\ \sum_{i=1}^m a_i\boldsymbol{e}_i\Big) = (\varphi(p),\ \boldsymbol{a})$$

により $U'\times\mathbb{R}^m$ と (集合として) 同型で, $\Phi_p = \Phi|_{T_pM} : T_pM \to \{\varphi(p)\}\times\mathbb{R}^m (\cong \mathbb{R}^m)$ はベクトル空間の間の同型. $U'\times\mathbb{R}^m$ の第一射影を $\pi_1 : U'\times\mathbb{R}^m \to U'$, $\pi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) := \boldsymbol{x}$ とすると $\pi_1\circ\Phi = \varphi\circ\pi$. 特に U が $\mathbb{R}^m$ の開集合 $(\varphi = 1_U,\ U = U')$ のとき Φ^0 により TU を標準的に $U\times\mathbb{R}^m$ と同一視でき, $T\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m}$ と見なせる.

座標近傍 $(V, \psi) = (V, \boldsymbol{y}) = (V; y_1, \dots, y_m)$ に対応する Φ を Ψ と表し, $U'\times\mathbb{R}^m$ の座標を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (x_1, \dots, x_m, a_1, \dots, a_m)$, $V'\times\mathbb{R}^m$ の座標を $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}) = (y_1, \dots, y_m, b_1, \dots, b_m)$ と表すと, 命題 5 により座標変換 $\Psi\circ\Phi^{-1}$ は,

$$(*) \qquad (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}) = \Psi\circ\Phi^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = ((\psi\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x}), J(\psi\circ\varphi^{-1})_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}), \quad \Big(\Leftrightarrow\ \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{b} = \Big(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}\Big)$$

と表され, $J(\psi\circ\varphi^{-1})$ (の各成分) が ($\boldsymbol{x}$ に関し) C^{r-1} 級なので, $\Psi\circ\Phi^{-1}$ は C^{r-1} 級微分同相になる.

$U'\times\mathbb{R}^m$ は $\mathbb{R}^{2m}$ の開部分空間なので, Φ が同相となる位相を TU に入れて位相空間にすることが出来る.

接束の位相 M の C^r 級座標近傍系 $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \to U'_\alpha) = (U_\alpha, \boldsymbol{x}^\alpha) = (U_\alpha; x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha)\}_{\alpha\in A}$ とする. このとき, 各 α について $TU_\alpha = \cup_{p\in U_\alpha} T_pM = \pi^{-1}(U_\alpha)$ が TM の開集合になり, 集合の同型

$$\Phi_\alpha : TU_\alpha \overset{\approx}{\to} U'_\alpha\times\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}, \qquad \Phi_\alpha\Big(\sum_{i=1}^m a_i^\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\Big)_p\Big) = (\varphi_\alpha(p),\ \boldsymbol{a}^\alpha) \quad (\boldsymbol{a}^\alpha = {}^t(a_1^\alpha \cdots a_m^\alpha) \in \mathbb{R}^m)$$

が同相になる様な TM の位相が一意的に定まる. 即ち, (同じ位相を定める 3 つの定義を与えると)

(1) $O \subset TM$ が TM の開集合 $\iff$ $\forall\alpha$ に対し $\Phi_\alpha(O\cap TU_\alpha) \subset U'_\alpha\times\mathbb{R}^m$ が $U'_\alpha\times\mathbb{R}^m$ の開集合.

(2) $v \in TM$ の基本近傍系 $\mathcal{B}(v)$ を $\mathcal{B}(v) := \{O \subset TM \mid v \in O \subset {}^\exists TU_\alpha,\ \Phi_\alpha(O)$ は $U'_\alpha\times\mathbb{R}^m$ の開集合 $\}$ で与える.

(3) $\mathcal{O}_\alpha := \{\Phi_\alpha^{-1}(O') \subset TM \mid O'$ は $U'_\alpha\times\mathbb{R}^m$ の開集合 $\}$ とし, $\mathcal{O} := \cup_\alpha\mathcal{O}_\alpha$ を TM の開基とする.

この位相により TM は Hausdorff 空間になる. M が第二可算公理をみたせば TM もみたすことが分る. (問題)

このとき, $TU_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ は TM の開集合, $\{(TU_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ は座標近傍系で, π は連続. 更に $(*)$ より この座標近傍系は C^{r-1} 級なので, $TM = (TM, \{(TU_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha\in A})$ は C^{r-1} 級多様体になる.

また, π は, 座標近傍 (TU_α, Φ_α) と $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ をとれば, $(\varphi_\alpha\circ\pi\circ\Phi_\alpha^{-1})(\boldsymbol{x}^\alpha, \boldsymbol{a}^\alpha) = \boldsymbol{x}^\alpha = \pi_1(\boldsymbol{x}^\alpha, \boldsymbol{a}^\alpha)$. 即ち 射影なので (この座標近傍については) C^∞ 級, 従って C^{r-1} 級になる. これらをまとめて,

定理 8(接束) m 次元 C^r 級多様体 M の接束 $TM = \cup_{p\in M} T_pM$, $\pi : TM \to M$ 上の位相で, 各座標近傍 (U, φ) に対し $\pi^{-1}(U)$ が開集合になり, $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U'\times\mathbb{R}^m$ が同相写像になるものが一意的に存在する.

その位相の下, $\pi^{-1}(U)$ が開部分多様体として Φ により $U'\times\mathbb{R}^m$ と C^{r-1} 級微分同相となる様な TM の C^{r-1} 級微分構造が一意的に存在する. (即ち 座標変換が C^{r-1} 級.) このとき $\pi : TM \to M$ は C^{r-1} 級写像になる.

定理 9(写像の微分) $F : M \to N^n$ を C^r 級多様体 M^m, N^n 間の C^r 級写像とするとき,

$$dF : TM \to TN, \qquad v \in T_pM \Rightarrow dF(v) := dF_p(v)$$

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "dF"] \arrow[d, "\pi^M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & TN \arrow[d, "\pi^N"] \\ M \arrow[r, "F"] & N \end{tikzcd}$$

は C^{r-1} 級であり, $dF_p = dF|_{T_pM} : T_pM \to T_{F(p)}N$ は線形写像で,

射影 $\pi^M : TM \to M$, $\pi^N : TN \to N$ に対し $\pi^N\circ dF = F\circ\pi^M$.

(恒等写像と合成写像に対し, $d1_M = 1_{TM}$, $d(G\circ F) = dG\circ dF$.)

$(\because)$ dF_p の線型性や $\pi^N\circ dF = F\circ\pi^M$ は定義より. (恒等写像と合成写像については補題 6 より.) C^{r-1} 級であることは定理 7 (dF の局所座標表示) による. 即ち, $p \in M$, $q = F(p) \in N$ の周りの座標近傍を $(U, \varphi) = (U, \boldsymbol{x})$, $(V, \psi) = (V, \boldsymbol{y})$, $(F(U) \subset V)$, $\boldsymbol{y} = F'(\boldsymbol{x}) := (\psi\circ F\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x})$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \in U'\times\mathbb{R}^m$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}) \in V'\times\mathbb{R}^n$ とするとき,

(D1) $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}) = dF'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) := (\Psi\circ dF\circ\Phi^{-1})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (F'(\boldsymbol{x}),\ JF'_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a})$. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = F'(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = JF'_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}$.

$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}$ に関し C^r 級, $\boldsymbol{a}$ に関し C^∞ 級. $JF'_{\boldsymbol{x}}$ (の各成分) が $\boldsymbol{x}$ に関し C^{r-1} 級なので, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{x}$ に関し C^{r-1} 級, $\boldsymbol{a}$ に関し C^∞ 級, より dF は C^{r-1} 級になる.