座標変換 点 $p\in M$ の周りの座標近傍 $(U,\varphi:U\to U')=(U,\boldsymbol{x})=(U;x_1,x_2,\dots,x_m)$, $\boldsymbol{x}_0:=\varphi(p)\in U'\subset\mathbb{R}^m$ と $(V,\psi:V\to V')=(V,\boldsymbol{y})=(V;y_1,y_2,\dots,y_m)$, $\boldsymbol{y}_0:=\psi(p)\in V'$ の間の座標変換 $\psi\circ\varphi^{-1}$ (, $\varphi\circ\psi^{-1}$) を

$$\boldsymbol{y}=(\psi\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x})=:\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\ (\Leftrightarrow y_i=y_i(x_1,\dots,x_m)\ (i=1,\dots,m))\quad \Big(,\ \boldsymbol{x}=(\varphi\circ\psi^{-1})(\boldsymbol{y})=:\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})\Big)$$

と表す. このとき 座標変換の Jacobi 行列は次の様に表される:

$$J(\psi\circ\varphi^{-1})=\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\boldsymbol{x}}=\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)\qquad\Big(,\ J(\varphi\circ\psi^{-1})=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{y}}=\Big(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\Big),\quad J(\varphi\circ\psi^{-1})=(J(\psi\circ\varphi^{-1}))^{-1}:\ \text{逆行列}\Big).$$

$f\in C^r(p)$ に対し, $f':=f\circ\varphi^{-1}$, $f'':=f\circ\psi^{-1}$ とすると $f'=f\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi^{-1}=f''\circ(\psi\circ\varphi^{-1})$, $f'(\boldsymbol{x})=f''(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))$ より

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p f=\Big(\frac{\partial f'}{\partial x_j}\Big)(\boldsymbol{x}_0)=\Big(\frac{\partial f''(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}=\sum_{i=1}^m\Big(\frac{\partial f''}{\partial y_i}\Big)_{\boldsymbol{y}_0}\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}=\sum_{i=1}^m\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_p f$$

これが全ての $f\in C^r(p)$ について成り立つので次を得た.

命題 5 (接ベクトルの基底変換と座標変換) 上の記号の下に

$$\text{(T4)}\qquad \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p=\sum_{i=1}^m\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_p,\quad \Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_p=\sum_{i=1}^m\Big(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\Big)_{\boldsymbol{y}_0}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p.$$

$v\in T_pM$ を, $v=\sum_{j=1}^m a_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p$, $\boldsymbol{a}:=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}$, $v=\sum_{i=1}^m b_i\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_p$, $\boldsymbol{b}:=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$ と 2 通りに表すとき,

$$\text{(T4)}\qquad b_i=\sum_{j=1}^m\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}a_j\quad(i=1,\dots,m)\iff \boldsymbol{b}=\Big(\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\boldsymbol{x}}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{a}=J(\psi\circ\varphi^{-1})_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{a}$$

(後半は前半より出る. (線型代数の問題))

写像の微分 M^m,N^n を C^r 級多様体, $F:M\to N$ を C^r 級写像, $p\in M$, $q:=F(p)\in N$ する.
このとき q の周りの局所関数 $f\in C^r_N(q)$ に対し $f\circ F\in C^r_M(p)$ $(U_{f\circ F}=F^{-1}(U_f))$ より, F は Derivation 間の写像 $F_*:D^r_p(M)\to D^r_q(N)$, $F_*(v)(f):=v(f\circ F)$ を与え, 線型である. (問題)
p を通る曲線 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ に対し, $F\circ\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$ は q を通る曲線なので $v_\gamma\mapsto v_{(F\circ\gamma)}$ は接空間の間の写像 $dF_p:T_pM\to T_qN$, $dF_p(v_\gamma):=v_{F\circ\gamma}$ を与え,

$$(***)\qquad v_{(F\circ\gamma)}(f)=\frac{d(f\circ(F\circ\gamma))}{dt}(0)=\frac{d((f\circ F)\circ\gamma)}{dt}(0)=v_\gamma(f\circ F)=F_*(v_\gamma)(f).$$

即ち $dF_p=F_*|_{T_pM}:T_pM\to T_qN$.

定義 線型写像 $dF_p=F_*|_{T_pM}:T_pM\to T_qN$, $dF_p(v)(f):=v(f\circ F)$ を F の**微分 (differential)** という.

補題 6 $F_1:M_1\to M_2$. $F_2:M_2\to M_3$ を C^r 級多様体間の C^r 級写像, $p_1\in M_1$, $p_2:=F_1(p_1)\in M_2$, $p_3:=F_2(p_2)\in M_3$, $1_M:M\to M$ (恒等写像), $p\in M$ とするとき,

$$d(F_2\circ F_1)_{p_1}=(dF_2)_{p_2}\circ(dF_1)_{p_1},\qquad d(1_M)_p=1_{T_pM}.$$

(容易に示せる. 問題)

注 $N=\mathbb{R}$ のとき, 関数 $F:M\to\mathbb{R}$ の微分 $df_p:T_pM\to T_{f(p)}\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$ は 値域の $\mathbb{R}$ の座標変数を s とすると, $dF_p(v_\gamma)(f)=\frac{d(f\circ(F\circ\gamma))}{dt}(0)=\frac{df}{ds}(q)\frac{dF\circ\gamma}{dt}(0)=v_\gamma(F)\Big(\frac{d}{ds}\Big)_q f$ より $dF_p(v)=v(F)\Big(\frac{d}{ds}\Big)_{F(p)}=v(F)$ (と同一視).

局所座標表示 M,N の, p,q の周りの座標近傍を $(U,\varphi)=(U;x_1,\dots,x_m)$, $(V,\psi)=(V;y_1,\dots,y_n)$, $(F(U)\subset V)$ とし, $F':=\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:U'\to V'$, $\boldsymbol{y}=F'(\boldsymbol{x})=:\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ とする. $f\in C^r(q)$, $f':=f\circ\psi^{-1}$ に対し
$f\circ F\circ\varphi^{-1}=f\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ F\circ\varphi^{-1}=f'\circ F'$, $(f\circ F\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x})=(f'\circ F')(\boldsymbol{x})=f'(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))$ より

$$dF_p\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p f=\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p(f\circ F)=\Big(\frac{\partial(f\circ F\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}=\Big(\frac{\partial f'(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}=\sum_{i=1}^n\Big(\frac{\partial f'}{\partial y_i}\Big)_{\boldsymbol{y}_0}\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}=\sum_{i=1}^n\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_q f$$

$v=\sum_{j=1}^m a_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p$, $dF_p(v)=\sum_{i=1}^n b_i\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_q$, $\boldsymbol{a}={}^t(a_1,\dots,a_m)$, $\boldsymbol{b}={}^t(b_1,\dots,b_n)$ (列ベクトル) とすると

$$dF_p\Big(\sum_{j=1}^m a_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p\Big)=\sum_{j=1}^m a_j\Big(dF_p\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p\Big)=\sum_{j=1}^m a_j\sum_{i=1}^n\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_q=\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^m\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}a_j\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_q$$

$$\therefore\qquad b_i=\sum_{j=1}^m\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}a_j\quad(i=1,\dots,n)\iff\boldsymbol{b}=\Big(\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\boldsymbol{x}}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{a}=JF'_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{a}$$

$F=1_M$ のときは $F'=\psi\circ F\circ\varphi^{-1}=\psi\circ\varphi^{-1}$ となり, 座標変換 (T4) になる. $\boldsymbol{y}=F'(\boldsymbol{x})$ に戻して次を得た.

定理 7 上の記号の下に $F:M\to N$ の局所座標表示は, $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}=F'={}^t(F_1,\dots,F_n)$ とするとき

$$\text{(D1)}\quad dF_p\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p=\sum_{i=1}^n\Big(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_q,\quad dF_p\Big(\sum_{j=1}^m a_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p\Big)=\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^m\Big(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\Big)_{\boldsymbol{x}_0}a_j\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_q,\quad \boldsymbol{b}=JF'_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{a}.$$

即ち, dF_p の 局所基底に関する**表現行列**は, F の局所座標表示 F' の **Jacobi 行列** ($n\times m$ 行列) である.

• C^r 級写像 $F: M^m \to N^n$ が $p \in M$ $(q = F(p))$ で,
(1) $\mathrm{rank}_p F = m$ $(\therefore\ m \leqq n)$ $\iff$ $dF_p : T_pM \to T_qN$ は単射. (線形代数の問題)
(2) $\mathrm{rank}_p F = n$ $(\therefore\ m \geqq n)$ $\iff$ $dF_p : T_pM \to T_qN$ は全射. (同上) 単射でも全射でもないときが特異点.
従って, 全ての $p \in M$ で $dF_p : T_pM \to T_qN$ が単射 $\iff$ F は はめ込み.
全ての $p \in M$ で $dF_p : T_pM \to T_qN$ が全射 $(\Leftrightarrow \mathrm{rank}_p F = n)$ のとき, F を**沈め込み (submersion)** という.
C^r 級関数 $F: M^m \to \mathbb{R}$ に対し, $p \in M$ が臨界点 $\iff$ $dF_p = 0 : T_pM \to T_q\mathbb{R}$ (0-写像).

例 2 $T_0\mathbb{R}$ の標準基底 $\left(\dfrac{d}{dt}\right)_0$ は恒等写像 $i_0 : U := (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ により与えられる $(v_{i_0} = \left(\dfrac{d}{dt}\right)_0)$.
$p \in M$ を通る曲線 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ と $f \in C^r(p)$ に対し, $d\gamma_0(v_{i_0}) \in T_pM$ は

$$d\gamma_0\Big(\frac{d}{dt}\Big)_0(f) = d\gamma_0(v_{i_0})(f) = v_{i_0}(f\circ\gamma) = \frac{d(f\circ\gamma\circ i_0)}{dt}(0) = \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(0) = v_\gamma(f) \quad \therefore\ d\gamma_0\Big(\frac{d}{dt}\Big)_0 = v_\gamma.$$

これにより, $d\gamma_0\left(\dfrac{d}{dt}\right)_0 = v_\gamma$ を $\left(\dfrac{d\gamma}{dt}\right)_0$ とも表す. 同様に, γ が $t_0 \in \mathbb{R}$ の開近傍上定義された p を通る曲線 $(\gamma(t_0) = p)$ のとき $d\gamma_{t_0}\left(\dfrac{d}{dt}\right)_{t_0}$ を $\left(\dfrac{d\gamma}{dt}\right)_{t_0}$ とも表す. このとき, $\left(\dfrac{d\gamma}{dt}\right)_{t_0}(f) = \dfrac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t_0)$ $(f \in C^r(p))$.

例 3 (積多様体) 積多様体 $M\times N$ からの射影を $\pi^1 : M\times N \to M$, $\pi^2 : M\times N \to N$, $(p,q) \in M\times N$ とするとき,

$$(d\pi^1_{(p,q)},\ d\pi^2_{(p,q)}) : T_{(p,q)}(M\times N) \to T_pM\times T_qN = T_pM\oplus T_qN$$

は線型同型写像であり, 通常, これにより両者を同一視する. (全射で同次元なので同型になる.) (問題)

部分多様体 M^m が N^n の部分多様体のとき, $p\in M$ の周りの N の座標近傍 $(V,\psi) = (V; y_1, \dots, y_n)$ として, [S] $M\cap V = \{\boldsymbol{y} \in V \mid y_{m+1} = \cdots = y_n = 0\}$ となるものがとれる. このとき $(M\cap V, \psi|_{M\cap V})$ が M の座標近傍なので T_pM の局所基底として, $\left(\dfrac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \dots, \left(\dfrac{\partial}{\partial y_m}\right)_p$ がとれる. $\therefore\ T_pM = \left\{\displaystyle\sum_{i=1}^m a_i\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)_p \in T_pN \mid a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}\right\}$.
• 一方, $\mathbb{R}^n$ の部分多様体 M の各点の接空間 $T_{\boldsymbol{x}}M$ は, $T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^n$ $(\cong \mathbb{R}^n)$ や $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間として記述できる:

例 4 (正則値の定理による部分多様体) $\mathbb{R}^n$ の開集合 D 上の C^r 級関数 $h : D \to \mathbb{R}$ の正則値 $c\in h(D)$ に対し, $h^{-1}(c)$ は正則値の定理により C^r 級多様体 M になる: $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ を標準座標系とするとき,

$$M := \left\{\boldsymbol{x} \in D \mid h(\boldsymbol{x}) = c,\ Jh_{\boldsymbol{x}} \equiv \mathrm{grad}\, h_{\boldsymbol{x}} \equiv \Big(\frac{\partial h}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \dots,\ \frac{\partial h}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\Big) \neq \boldsymbol{0}\right\}, \quad \dim M = n-1 =: m.$$

$T_{\boldsymbol{x}}M$ を $\mathbb{R}^n$ の $n-1$ 次元線型部分空間, $Jh_{\boldsymbol{x}}$ を ${}^tJh_{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ とみなすと, $T_{\boldsymbol{x}}M$ は $\langle Jh_{\boldsymbol{x}}\rangle$ の直交補空間になる:

$$\langle Jh_{\boldsymbol{x}}\rangle^\perp := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid (Jh_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{a}) \equiv Jh_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a} = 0\} \equiv \left\{v = \sum_{i=1}^n a_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_{\boldsymbol{x}} \in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^n \;\middle|\; v(h) \equiv \sum_{i=1}^n a_i\Big(\frac{\partial h}{\partial x_i}\Big)_{\boldsymbol{x}} \equiv Jh_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a} = 0\right\},$$

$$\therefore \qquad \langle Jh_{\boldsymbol{x}}\rangle^\perp \equiv \{v \in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^n \mid v(h) = 0\} = T_{\boldsymbol{x}}M.$$

$(\because)$ $T := \langle Jh_{\boldsymbol{x}}\rangle^\perp$ とおく. $h(M) = \{c\}$ より $\boldsymbol{x}$ を通る M 上の曲線 γ に対し, $h(\gamma(t)) \equiv c$. $\therefore\ v_\gamma(h) = 0$. $\therefore\ v_\gamma \in T$. $\therefore$ $T_{\boldsymbol{x}}M \subset T$. 一方, T は定義より $\boldsymbol{a}$ に関する同次一次方程式 $Jh_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a} = 0$ の解空間, $\therefore T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^n$ の $n-1$ 次元線型部分空間なので次元が一致. $\therefore T_{\boldsymbol{x}}M = T$. ($h$ が写像 $h=(h_1, \dots, h_k) : D \to \mathbb{R}^k$ のときも同様に, $\langle Jh_{\boldsymbol{x}}\rangle^\perp := \langle Jh_{1\boldsymbol{x}}, \dots, Jh_{k\boldsymbol{x}}\rangle^\perp$ は $Jh_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ の解空間 $(\dim\langle Jh_{\boldsymbol{x}}\rangle^\perp = n - \mathrm{rank}\, Jh_{\boldsymbol{x}} = n-k$) で, $T_{\boldsymbol{x}}M \subset \langle Jh_{\boldsymbol{x}}\rangle^\perp$ より $T_{\boldsymbol{x}}M = \langle Jh_{\boldsymbol{x}}\rangle^\perp$ となる.)
Lagrange の未定乗数法 D 上の関数 f に対し $\boldsymbol{x} \in M$ が $f|_M$ の臨界点 (特に極値を取る点) $\Leftrightarrow df_{\boldsymbol{x}}(T_xM) = 0 \Leftrightarrow$ $v(f) = 0$ $(\forall v \in T_{\boldsymbol{x}}M) \Leftrightarrow Jf_{\boldsymbol{x}} \perp T_{\boldsymbol{x}}M$ より $Jf_{\boldsymbol{x}} \in \langle Jh_{\boldsymbol{x}}\rangle$. $\therefore$ $Jf_{\boldsymbol{x}} = \lambda Jh_{\boldsymbol{x}}$ となる定数 (Lagrange 乗数) λ が存在.
h が写像 $h=(h_1, \dots, h_k) : D \to \mathbb{R}^k$ で $M = h^{-1}(\boldsymbol{c})$ が C^r 級多様体, $\boldsymbol{x} \in M$ (正則点) のときも同様に $Jf_{\boldsymbol{x}} \in \langle Jh_{\boldsymbol{x}}\rangle$ より $Jf_{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^k \lambda_i Jh_{i\boldsymbol{x}}$ となる λ_i が存在. $\Leftrightarrow Jh_{1\boldsymbol{x}}, \dots, Jh_{k\boldsymbol{x}}, Jf_{\boldsymbol{x}}$ の Gram 行列式 $= 0$.

余接ベクトル, 余接空間 接空間 T_pM の双対空間 $T_p^*M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pM, \mathbb{R})$ を**余接 (ベクトル) 空間 (cotangent (vector) space)** といい, その元を**余接ベクトル (cotangent vector)** という.
$\mathbb{R}$ の接空間 $T_x\mathbb{R}$ を標準的に $\mathbb{R}$ と同一視する. 局所関数 $f \in C^r(p)$ に対し, $df_p : T_pU_f = T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ は線型写像なので $df_p \in T_pM^*$, 即ち df_p は余接ベクトルと見なせる. $v \in T_pM$ に対し $df_p(v) = v(f)$ である.
p の周りの座標近傍 $(U,\varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ の成分関数 (=座標関数) φ_i は x_i とも書かれるが, $d\varphi_{ip}$ は通常, dx_{ip} と表される. このとき, $dx_{1p}, \dots, dx_{mp}$ は, $dx_{ip}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\varphi_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_{\boldsymbol{x}_0} = \delta_{ij}$ より $dx_{ip}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \delta_{ij}$. $\therefore$ $dx_{1p}, \dots, dx_{mp}$ は T_p^*M の基底で, $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ の双対基底となる.
$df_p\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)_p f = \dfrac{\partial f'}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$ より $df_p = \dfrac{\partial f'}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)dx_{1p} + \cdots + \dfrac{\partial f'}{\partial x_m}(\boldsymbol{x}_0)dx_{mp}$.
df_p, dx_{ip} は (写像の微分なので) **微分 (differential)** (あるいは全微分, 外微分) とも呼ばれる.
M が $\mathbb{R}^m$ の開集合 $U = U'$ $(\varphi = 1_U)$ のときは $f' = f$ であり, 各点 $p = \boldsymbol{x}_0$ で成り立つのでこれらを略すと,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m.$$