参考: (幾何学概論での) 曲面の接ベクトルと接ベクトル空間

これは幾何学概論でのノートに多少注釈を付け加えたものである. $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面 S を多様体と考えるとき, 局所座標系 $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^2$ の逆写像 $p := \varphi^{-1} : U' \to U \subset S \subset \mathbb{R}^3$ が曲面のパラメーター表示になる.
以下では $D := U'$ としている. また, $\dot\gamma := \frac{d\gamma}{dt}$, $p_u := \frac{\partial p}{\partial u}$ 等.

• 接ベクトルと微分　曲面 S のパラメーター表示 $p(u,v)$ と $\boldsymbol{u}_0 = (u_0, v_0) \in D$ において, $u \mapsto p(u, v_0)$ によって定まる S 上の曲線を (同じだが $\gamma_1(t) := p(u_0{+}t,\, v_0)$ を) $\boldsymbol{x}_0 := p(\boldsymbol{u}_0)$ における $\boldsymbol{u}$ **曲線**といい, $v \mapsto p(u_0, v)$ によって定まる S 上の曲線 ($\gamma_2(t) := p(u_0,\, v_0{+}t)$) を $\boldsymbol{x}_0$ $(p(\boldsymbol{u}_0))$ における $\boldsymbol{v}$ **曲線**という. (**図**)
これらの曲線の $\boldsymbol{x}_0$ における速度ベクトル (= 接ベクトル) は, 曲面 S 上の $\boldsymbol{x}_0$ における接ベクトルと考えられ,

$$\frac{d\gamma_1}{dt}(0) := \frac{dp(u_0{+}t,\, v_0)}{dt}\Big|_{t=0} =: \frac{\partial p}{\partial u}(\boldsymbol{u}_0) =: p_u(\boldsymbol{u}_0), \qquad \frac{d\gamma_2}{dt}(0) = \frac{\partial p}{\partial v}(\boldsymbol{u}_0) = p_v(\boldsymbol{u}_0)$$

なので, $\boldsymbol{x}_0 + p_u(\boldsymbol{u}_0)$, $\boldsymbol{x}_0 + p_v(\boldsymbol{u}_0)$ は S の $\boldsymbol{x}_0$ における接平面上にある.
$\boldsymbol{a} = (a_1, a_1) \in \mathbb{R}^2$ に対し, $\boldsymbol{x}_0$ を通る $\boldsymbol{a}$ 方向の S 上の曲線が $\gamma_{\boldsymbol{a}}(t) := p(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{a}t) = p(u_0{+}a_1t, v_0{+}a_1t)$ で与えられ, その接ベクトル $\dot\gamma_{\boldsymbol{a}}(0)$ は,

$$\dot\gamma_{\boldsymbol{a}}(0) := \frac{dp(u_0{+}a_1t, v_0{+}a_1t)}{dt}\Big|_{t=0} = \left(p_u(\boldsymbol{u}_0)\frac{d(u_0{+}a_1t)}{dt} + p_v(\boldsymbol{u}_0)\frac{d(v_0{+}a_2t)}{dt}\right)\Big|_{t=0} = p_u(\boldsymbol{u}_0)a_1 + p_v(\boldsymbol{u}_0)a_2.$$

$$\therefore \qquad \dot\gamma_{\boldsymbol{a}}(0) = p_u(\boldsymbol{u}_0)a_1 + p_v(\boldsymbol{u}_0)a_2 = Jp(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{a} \in \langle p_u(\boldsymbol{u}_0),\ p_v(\boldsymbol{u}_0)\rangle$$

(これを $p(\boldsymbol{u})$ の $\boldsymbol{a}$ 方向の微分 (係数) という. $\langle p_u(\boldsymbol{u}_0),\ p_v(\boldsymbol{u}_0)\rangle$ は $p_u(\boldsymbol{u}_0)$, $p_v(\boldsymbol{u}_0)$ の張る $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間.)
点 $\boldsymbol{x}_0$ を通る曲面 S 上の曲線 $\gamma(t)$ $(\gamma(0){=}\boldsymbol{x}_0)$ の接ベクトル $\dot\gamma(0)$ の全体を $T_{\boldsymbol{x}_0}S$ とする:

$$T_{\boldsymbol{x}_0}S := \{\dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \gamma(t) \ \text{ は } S \text{ 上の曲線で } \gamma(0) = \boldsymbol{x}_0\}$$

(**注**) 実際には $T_{\boldsymbol{x}_0}S \subset \{\boldsymbol{x}_0\}{\times}\mathbb{R}^3 \subset S{\times}\mathbb{R}^3$ であるが, $\boldsymbol{x}_0$ を固定しており, また明示されているので, ここでは $\{\boldsymbol{x}_0\}{\times}\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ $((\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v}) \leftrightarrow \boldsymbol{v})$ と見なし, $T_{\boldsymbol{x}_0}S \subset \mathbb{R}^3$ と考えている. また $\boldsymbol{x}_0$ の近傍 W に対し $T_{\boldsymbol{x}_0}W = T_{\boldsymbol{x}_0}S$.
γ は D 内の平面曲線 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t)$ により $\gamma(t) = p(\boldsymbol{u}(t)) = p(u(t), v(t))$ $(\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0)$ と表される. $(\boldsymbol{u}(t) = p^{-1}(\gamma(t)))$

$$\dot\gamma(0) = p_u(\boldsymbol{u}_0)\dot u(0) + p_v(\boldsymbol{u}_0)\dot v(0) = Jp(\boldsymbol{u}_0)\dot{\boldsymbol{u}}(0) \in \langle p_u(\boldsymbol{u}_0),\ p_v(\boldsymbol{u}_0)\rangle$$

$$(\boldsymbol{a} = (\dot u(0), \dot v(0)) \text{ のとき}, \dot\gamma(0) = \dot\gamma_{\boldsymbol{a}}(0))$$

より $T_{\boldsymbol{x}_0}S$ は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間になる. $T_{\boldsymbol{x}_0}S$ を曲面 S 上の点 $\boldsymbol{x}_0$ における (または $\boldsymbol{x}_0$ 上の) **接 (ベクトル) 空間** (tangent (vector) space) という. Jacobi 行列 $Jp(\boldsymbol{u}_0) = (p_u(\boldsymbol{u}_0), p_v(\boldsymbol{u}_0))$ は (ベクトルの組と考えて) 接空間 $T_{\boldsymbol{x}_0}S$ の基底になり, $\boldsymbol{a}$ $(= \dot{\boldsymbol{u}}(0)) \in \mathbb{R}^2$ が接ベクトル $\dot\gamma(0) = Jp(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{a}$ の座標となる.
また, 点 $\boldsymbol{x}_0$ における S の**接平面** は

$$\boldsymbol{x}_0 + T_{\boldsymbol{x}_0}S := \{p(\boldsymbol{u}_0) + Jp(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2\} = \{p(\boldsymbol{u}_0) + p_u(\boldsymbol{u}_0)a_1 + p_v(\boldsymbol{u}_0)a_2 \,|\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

接ベクトルと微分　S 上の関数 $f : S \to \mathbb{R}$ ($\boldsymbol{x}_0$ の開近傍上で定義されていればよい) に対し, $\boldsymbol{x}_0$ 上の接ベクトル $\boldsymbol{v} = \dot\gamma(0) = p_u(\boldsymbol{u}_0)a_1 + p_v(\boldsymbol{u}_0)a_2 = Jp(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{a}$ による ($\boldsymbol{a}$ 方向の) **微分** $\boldsymbol{v}(f)$ が

$$\boldsymbol{v}(f) := \frac{df(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{df(p(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{a}t))}{dt}\Big|_{t=0} = \left(a_1\frac{\partial f{\circ}p}{\partial u} + a_2\frac{\partial f{\circ}p}{\partial v}\right)(\boldsymbol{u}_0) = \left(a_1\frac{\partial}{\partial u} + a_2\frac{\partial}{\partial v}\right)\Big|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0}(f{\circ}p)$$

により定義される. (注) $f : S \to \mathbb{R}$ が連続で, $f{\circ}p : D \to \mathbb{R}$ が滑らかなら $v(f)$ は定義される.)

接 (ベクトル) 束 (tangent (vector) bundle)　$T_{\boldsymbol{x}}S \subset \{\boldsymbol{x}\}{\times}\mathbb{R}^3$ なので $TS := \cup_{\boldsymbol{x}\in S}T_{\boldsymbol{x}}S \subset S{\times}\mathbb{R}^3$ は $S{\times}\mathbb{R}^3$ の部分空間になる. TS を S の**接 (ベクトル) 束** という. $U = p(D)$ に対し $TU = \cup_{\boldsymbol{x}\in U}T_{\boldsymbol{x}}S$ は

$$p{\times}Jp : D{\times}\mathbb{R}^2 \to TU, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}) \mapsto (p(\boldsymbol{u}),\ Jp(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a})$$

により $D{\times}\mathbb{R}^2$ と微分同相. (行列 Jp により定まる線形写像も Jp と表した. p が C^r 級なら $p{\times}Jp$ は C^{r-1} 級.)

接ベクトルと座標変換　座標変換の微分同相 (diffeo) を $q : D' \to D$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta) = (\xi_1, \xi_2) \in D'$, $\boldsymbol{u} = q(\boldsymbol{\xi})$ とし, $\tilde p(\boldsymbol{\xi}) := p(q(\boldsymbol{\xi}))$, $\tilde p = p{\circ}q : D' \to S$ とするとき,

$$(\tilde p_\xi(\boldsymbol{\xi}), \tilde p_\eta(\boldsymbol{\xi})) = J\tilde p(\boldsymbol{\xi}) = J(p{\circ}q)(\boldsymbol{\xi}) = Jp(q(\boldsymbol{\xi}))Jq(\boldsymbol{\xi}) = Jp(\boldsymbol{u})Jq(\boldsymbol{\xi}) = (p_u(\boldsymbol{u}), p_v(\boldsymbol{u}))Jq(\boldsymbol{\xi})$$

即ち, Jq が接空間 $T_{\boldsymbol{x}}S$ $(\boldsymbol{x} = p(\boldsymbol{u}) = \tilde p(\boldsymbol{\xi}))$ の基底 Jp から基底 $J\tilde p$ への変換行列を与える. このとき接ベクトル $\boldsymbol{v}$ の Jp, $J\tilde p$ に関する座標 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{v} = Jp\boldsymbol{a} = J\tilde p\boldsymbol{b})$ の間の座標変換は $Jp\,\boldsymbol{a} = J\tilde p\,\boldsymbol{b} = JpJq\boldsymbol{b}$ より

$$\boldsymbol{a} = Jq\,\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{b} = Jq^{-1}\boldsymbol{a}$$

(微積分学の流儀に従って) $\boldsymbol{u} = q(\boldsymbol{\xi})$ を $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}) = (u(\boldsymbol{\xi}), v(\boldsymbol{\xi}))$, $\tilde p(\boldsymbol{\xi}) = p(q(\boldsymbol{\xi}))$ を $p(\boldsymbol{\xi})$ と表すと:

$$(p_\xi(\boldsymbol{\xi}), p_\eta(\boldsymbol{\xi})) = (p_u(\boldsymbol{u}), p_v(\boldsymbol{u}))Jq(\boldsymbol{\xi}) = (p_u, p_v)\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} = (p_u u_\xi + p_v v_\xi,\ p_u u_\eta + p_v v_\eta)$$