接ベクトルと接(ベクトル)空間

以下, M を m 次元 C^r 級多様体とし, 点 $p \in M$ を固定して考える.

$(U, \varphi : U \rightarrow U') = (U, \mathbf{x}) = (U; x_1, x_2, \dots, x_m)$ を p の周りの座標近傍, $\mathbf{x}_0 := \varphi(p) \in U' \subset \mathbb{R}^m$ とする.

C^r 級曲線 $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ ($a < 0 < b$), $\gamma(0) = p$ を p を通る (C^r 級) 曲線という. この局所座標表示を

$$\gamma' := \varphi \circ \gamma : (a, b) \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m, \quad \gamma'(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \quad (\text{又は } \gamma'(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_m(t)))$$

とする. (γ が C^r 級 $\Leftrightarrow \gamma'$ が C^r 級 $\Leftrightarrow$ 各 $x_i(t)$ が C^r 級) 以下, $(a, b) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ としておく.

注意 1 γ' の実際的な定義域は $\gamma^{-1}(U) \subset (a, b)$ だが, 定義域を縮めてもよいのでこの様に表しておく. 以下でも同様.

局所関数 p のある開近傍 U_f 上で定義された (C^r 級) 関数 $f : U_f \rightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合を $C^r(p)$, $C_M^r(p)$ と表す:

$$C^r(p) = C_M^r(p) := \{f : U_f \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^r \text{ 級}\}.$$

f を p における (p の周りの) 局所 (C^r 級) 関数という. $C^r(p)$ には 和, スカラー倍, 積が,

$f : U_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U_g \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ に対し, 次式で定義される:

和: $(f+g) : U_f \cap U_g \rightarrow \mathbb{R}$, $(f+g)(q) := f(q) + g(q)$ ($q \in U_f \cap U_g$),

a 倍: $af : U_{af} = U_f \rightarrow \mathbb{R}$, $(af)(q) := a \cdot f(q)$ ($q \in U_f$),

積: $(f \cdot g) : U_f \cap U_g \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(q) := f(q) \cdot g(q)$ ($q \in U_f \cap U_g$).

f の (U, φ) に関する局所座標表示を $f' := f \circ \varphi : U' \rightarrow \mathbb{R}$ と表す. (注意 1 と同様. 実際的な定義域は $\varphi(U \cap U_f) \subset U'$.)

• 一変数関数 $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ の $t=0$ における微分係数 $\left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f(\gamma(t)))}{dt} \right|_{t=0} \in \mathbb{R}$

は, 局所座標表示を用いると $f \circ \gamma = f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \gamma = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma) = f' \circ \gamma' : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U' \rightarrow \mathbb{R}$ より

$$(*) \quad \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f'(\gamma'(t)))}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f'}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \frac{dx_i}{dt}(0) =: \left(\sum_{i=1}^m \frac{dx_i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \right) f'$$

接ベクトルと接(ベクトル)空間の定義 p を通る曲線 γ に対し, 写像 $v_\gamma : C^r(p) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$v_\gamma(f) := \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} \quad (\text{局所座標系によらず定まる})$$

と定義し, (γ の定める) M の p における**接ベクトル (tangent vector)**, 又は γ に沿う**方向微分** といい,

$$T_p M = T_p(M) := \{v_\gamma \mid \gamma \text{ は } p \text{ を通る曲線}\}$$

を M の p における (又は, p 上の) **接(ベクトル)空間 (tangent (vector) space)** という.

(*) より, 座標近傍 $(U, \varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$, $f' := f \circ \varphi^{-1}$, $\gamma'(t) := (\varphi \circ \gamma)(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ に対し

$$(T1') \quad v_\gamma(f) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{dx_i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \right) f'$$

補題 1 v_γ は, $f, g \in C^r(p)$, $a, b \in \mathbb{R}$ に対し次をみたす:

(0) p のある近傍 W 上で f, g が一致する ($f|_W = g|_W$) $\implies v_\gamma(f) = v_\gamma(g)$.

(1) (線形性) $v_\gamma(af + bg) = a \cdot v_\gamma(f) + b \cdot v_\gamma(g)$. (2) (積公式) $v_\gamma(f \cdot g) = v_\gamma(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v_\gamma(g)$.

($\therefore$) (2) は $v_\gamma(f \cdot g) = \left. \frac{d((f \circ \gamma) \cdot (g \circ \gamma))}{dt} \right|_{t=0}$ と関数の微分の積公式, $f(\gamma(0)) = f(p)$ 等より出る. 他も同様.(問題)

注 (1)+(2) の性質を derivation property (微分性) といい, この性質をもつ写像を derivation (微分作用素) という.

定義 (Derivation, 方向微分) (補題 1 の (0,1,2) と同じ) 次の性質 (0,1,2) をもつ写像 v 全体の集合を $D_p^r(M)$ と表す:

$$D_p^r(M) := \{v : C^r(p) \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ は次の (0,1,2) をみたす}\} \quad (\supset T_p M)$$

(0) p のある近傍 W 上で $f|_W = g|_W \implies v(f) = v(g)$.

(1) $v(af + bg) = a \cdot v(f) + b \cdot v(g)$. (2) $v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g)$.

(注) (1),(2) をみたす v は (0) をみたすことが示される. (問題) よって定義上 (0) は不要.

命題 2 $D_p^r(M)$ は次の和, スカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる. $u, v \in D_p^r(M)$, $a \in \mathbb{R}$, $f \in C^r(p)$ に対し,

和: $(u+v)(f) := u(f) + v(f)$, スカラー倍: $(av)(f) := a \cdot v(f)$. (零ベクトル v_0 は $v_0(f) = 0$ ($\forall f$). 0 と書く.)

($\therefore$) $(u+v), av \in D_p^r(M)$, 即ち $(u+v), av$ が (0,1,2) をみたすことを確かめれば, 定義と $\mathbb{R}$ の和, 積の性質より, 和, スカラー倍の結合, 交換, 分配法則等のベクトル空間の公理をみたすことは容易. また, (0) をみたす事は明らか.

$u+v$ が (2) をみたす事: $(u+v)(f \cdot g) = u(f \cdot g) + v(f \cdot g) = u(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot u(g) + v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g) = (u(f)+v(f))g(p) + f(p)(u(g)+v(g)) = (u+v)(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot (u+v)(g)$. 他も同様. (問題)

$T_p M$ の基底 p の周りの座標近傍 $(U, \varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$, $\varphi(p) = \mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ に対し, 曲線 $\bar{\varphi}'_i, \bar{\varphi}_i$ を

$$\bar{\varphi}'_i(t) := (x_1^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_m^0) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U', \quad \bar{\varphi}_i := \varphi^{-1} \circ \bar{\varphi}'_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset M \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

とする. $f \in C^r(p)$ に対し $(f \circ \bar{\varphi}_i)(t) = (f' \circ \bar{\varphi}'_i)(t) = f'(x_1^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_m^0)$ より

$$v_{\bar{\varphi}_i}(f) = \frac{d(f \circ \bar{\varphi}_i)}{dt}(0) = \frac{df'(x_1^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_m^0)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\partial f'}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) =: \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} f'$$

定義 $v_{\bar{\varphi}_i}$ を $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$ と表す. ($i = 1, 2, \dots, m$.) このとき $(U, \varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$ に関する局所座標表示は

$$(T2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p f := v_{\bar{\varphi}_i}(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} f' := \frac{\partial f'}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) =: \left(\frac{\partial f'}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0}.$$

局所座標系 φ を $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $\varphi_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ と成分表示すると $\varphi'_j(\mathbf{x}) := \varphi_j \circ \varphi^{-1}(\dots, x_j, \dots) = x_j$ なので,

$$(**) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \varphi_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \varphi'_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} x_j = \delta_{ij}.$$

定理 3 $T_p(M)$ は $D_p^r(M)$ の m 次元線型部分空間であり, p の周りの局所座標系 $(U, \varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$ に対し,

$$(T3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)_p := \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p \right) \quad (= (v_{\bar{\varphi}_1}, v_{\bar{\varphi}_2}, \dots, v_{\bar{\varphi}_m}))$$

は接ベクトル空間 $T_p(M)$ の基底になる. ($(U, \varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$ に関する局所基底という.)

($\therefore$) (T3) で生成される $D_p^r(M)$ の線型部分空間を T とおく. p を通る曲線 γ と $\forall f \in C^r(p)$ について,

$$(T1'): v_\gamma(f) = \sum_{i=1}^m \frac{dx_i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} f' = \sum_{i=1}^m \frac{dx_i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p f, \quad ((\varphi \circ \gamma)(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))) \text{ が成り立つので,}$$

$$(T1) \quad v_\gamma = \sum_{i=1}^m \frac{dx_i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \quad \frac{dx_i}{dt}(0) (=:\dot{x}_i(0)) \in \mathbb{R}.$$

$\therefore v_\gamma$ は (T3) の一次結合で表されるので $T_p(M) \subset T$.

逆に, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ に対し, $\gamma'(t) := (x_1^0 + a_1 t, \dots, x_m^0 + a_m t)$, $\gamma := \varphi^{-1} \circ \gamma'$ とおけば $\dot{x}_i(0) = a_i$ より

$$(T1'') \quad T \ni \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p f = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} f' = v_\gamma(f) \in T_p(M). \quad \therefore T \subset T_p(M) \quad \therefore T = T_p(M).$$

よって $T_p(M)$ は $D_p^r(M)$ の線型部分空間になり, (T3) の一次独立性を示せば定理 3 が示される.

$$X := \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = 0 \text{ とおくと } (**) \text{ より } 0 = X(\varphi_j) = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \varphi_j = \sum_{i=1}^m a_i \delta_{ij} = a_j \quad (\forall j).$$

$\therefore a_1 = \dots = a_m = 0$ より (T3) は一次独立. □

定理 3 の証明の系として,

系 4 p を通る曲線 $\gamma, \tilde{\gamma}$ が, p の周りのある座標近傍 $(U, \varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$ に対し $(\varphi \circ \gamma)(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$, $(\varphi \circ \tilde{\gamma})(t) = (\tilde{\gamma}_1(t), \dots, \tilde{\gamma}_m(t))$ と表すとき, $\frac{d\gamma_i}{dt}(0) = \frac{d\tilde{\gamma}_i}{dt}(0) \quad (\forall i)$ ならば $v_\gamma = v_{\tilde{\gamma}}$.

接ベクトルの定義 (再掲) $p \in M$ における接ベクトルとは p を通る曲線 γ の定める derivation v_γ のことである.

(注) 接空間の別の定義として, p を通る曲線全体の集合の, 系 4 の関係 $\frac{d\gamma_i}{dt}(0) = \frac{d\tilde{\gamma}_i}{dt}(0) \quad (\forall i)$ をみたととき同値とする同値関係による商集合を接空間と定義し, 同値類を接ベクトルとする, という定義がある. (問題)

(注) $r = \infty$ のときは $T_p(M) = D_p^\infty(M)$ ($1 \leq r < \infty$ のときは $T_p(M) \neq D_p^r(M)$) が知られている. (問題)

• 1次元多様体については, 基底は (一変数なので) $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p$ ではなく, 常微分記号の $\left(\frac{d}{dx} \right)_p$ や $\left(\frac{d}{dt} \right)_p$ を用いる.

• M^m が C^r 級多様体 N^n の部分多様体のとき, $p \in M$ を通る M 上の曲線 γ を N 上の曲線と見なし, $v_\gamma \in T_p M$ を $v_\gamma \in T_p N$ と見なすと, $T_p M$ は $T_p N$ の m 次元線形部分空間と見なせる: $T_p M \subset T_p N$.

特に, $p \in M$ の開近傍 $W (= \text{開部分多様体})$ に対し $T_p W = T_p M$ と見なせる.

例 1 M の局所座標系 $(U, \varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$ は接空間 $T_p M$ の局所基底 (T3) を定める. この基底に関する $v \in T_p M$ の「座標」を対応させる線型同型写像 Φ_p は, $\mathbf{a} = {}^t(a_1 \dots a_m) \in \mathbb{R}^m$ とするとき,

$$\Phi_p: T_p M \rightarrow \{\varphi(p)\} \times \mathbb{R}^m (\cong \mathbb{R}^m), \quad \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \mapsto \left(\varphi(p), \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_i \right) = (\varphi(p), \mathbf{a}) \quad (\mapsto \mathbf{a}).$$

特に, U が $\mathbb{R}^m$ の開集合 ($\varphi = 1_U$). $p = \mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^m$ のとき, 基底と Φ_p は $\mathbb{R}^m$ の標準座標系により定まるので,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)_\mathbf{x} := \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_\mathbf{x}, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_\mathbf{x}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_\mathbf{x} \right) \subset T_\mathbf{x} U = T_\mathbf{x} \mathbb{R}^m \text{ を } T_\mathbf{x} \mathbb{R}^m \text{ の標準基底 といひ, 通常,}$$

$\Phi_\mathbf{x}^0 (= \Phi_p): T_\mathbf{x} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\cong} \{\mathbf{x}\} \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ により $T_\mathbf{x} \mathbb{R}^m$ は $\{\mathbf{x}\} \times \mathbb{R}^m$ や $\mathbb{R}^m$ と同一視される. このとき $\mathbb{R}^m$ の曲線 $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ の定める接ベクトル v_γ は (T1) より $\dot{\gamma}(0) = (\dot{x}_1(0), \dots, \dot{x}_m(0))$ と表される.

これは, $m=2, 3$ のときの, 曲線 γ の 0 における (幾何学概論での) 接ベクトル (速度ベクトル) の定義に一致する.