はめ込み, 埋め込み, 部分多様体

以下, $M=(M,\mathcal{S})$ を m 次元の, $N=(N,\mathcal{T})$ を n 次元の C^r 級多様体, $\tilde{\mathcal{S}},\tilde{\mathcal{T}}$ をそれらの極大座標近傍系, $f:M^m\to N^n$ を C^s 級写像とする. $(1\leqq s\leqq r)$

定義 (はめ込み, 埋め込み) $m\leqq n$ とする. 全ての点 $p\in M$ が $f:M^m\to N^n$ の正則点, 即ち $\operatorname{rank}_p f=m$ $(p\in M)$ のとき f を C^s 級**はめ込み (immersion)** (挿入) という. 更に, C^s 級はめ込み f が C^s 級 **埋め込み (embedding, imbedding)** とは, f が M から N の部分空間 $f(M)$ への同相写像であるときをいう.

以下, 多様体と同じ微分可能性をもつ (=C^r 級の) はめ込み, 埋め込み, 微分同相, (以下で定義する) 部分多様体, 座標近傍等では「C^r 級」を略し, 微分可能性を変えるときには 「C^s 級」をつける.

例 (正則曲線) 開区間 (a,b) から C^r 級多様体 M への C^s 級写像 $\gamma:(a,b)\to M$ を C^s 級曲線 (C^scurve) と呼んだ. ($r=s$ のとき単に曲線という.) γ がはめ込みのとき γ を**正則** (曲線) という. (図) 即ち, γ の局所座標表示 $\varphi(\gamma(t))=(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_m(t))$ が至る所 $J\gamma\neq\mathbf{0}$ のとき正則である. (幾何学概論の用語)

例 ($m=n$) (C^r 級) 微分同相写像 $f:M^n\to N^n$ や開部分多様体の包含写像, 特に恒等写像 1_M, は埋め込みである.

- 以下 $m<n$ のとき, $\iota:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x}\mapsto(\boldsymbol{x},\mathbf{0})$ により $\mathbb{R}^m$ を $\mathbb{R}^m\times\{\mathbf{0}\}\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}=\mathbb{R}^n$ と同一視する.

例 包含写像 $\iota:\mathbb{R}^m\hookrightarrow\mathbb{R}^n$, $\iota:S^m\hookrightarrow S^n$, $\iota:\mathbb{R}\mathrm{P}^m\hookrightarrow\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $\iota:\mathbb{C}\mathrm{P}^m\hookrightarrow\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ はいずれも埋め込みである.

定義 (部分多様体) n 次元 C^r 級多様体 $(N,\tilde{\mathcal{T}})$ の部分空間 M が N の m 次元 (C^r 級) **部分多様体 (submanifold)** $(0\leqq m\leqq n)$ とは, 各点 $p\in M$ に次の様な N の座標近傍 $(V,\psi)=(V;y_1,\ldots,y_n)\in\tilde{\mathcal{T}}$ が存在するときをいう: (図)

[S] $\quad M\cap V=\{\boldsymbol{y}\in V\mid y_{m+1}=\cdots=y_n=0\}$ $\quad(\Leftrightarrow\ \psi(M\cap V)=V'\cap\mathbb{R}^m\times\{\mathbf{0}\}).\quad$ ($m=n$ のときは $M\cap V=V$).

更に M が N の閉集合であるとき, M を N の**閉部分多様体 (closed submanifold)** という.

(**注** $U:=M\cap V$ は M の相対 (位相による) 開集合である. また, $m=n$ のときは M は**開部分多様体**になる.)

命題 n 次元 C^r 級多様体の m 次元部分多様体 M は m 次元 C^r 級多様体である.

証明 $m<n$ とする. N は Hausdorff 空間なので M もそう. 定義の [S] をみたす $p\in M$ を含む座標近傍を $(V_p,\psi_p)=(V_p,\boldsymbol{y}^p)=(V_p;y^p_1,\ldots,y^p_n)\in\tilde{\mathcal{T}}$ とし, $U_p:=M\cap V_p$, $\varphi_p:=\psi_p|_{U_p}$, $(U_p,\varphi_p)=(U_p,\boldsymbol{x}^p)=(U_p;x^p_1,\ldots,x^p_m)$, $(x^p_i=y^p_i,\ i\leqq m)$ とする ($U'_p:=\varphi_p(U_p)\subset\mathbb{R}^m\times\{\mathbf{0}\}$ を $U'_p\subset\mathbb{R}^m$ と見なしている). このとき $p\in U_p$ より $\cup_{p\in M}U_p=M$ で, $\{(U_p,\varphi_p)\}_{p\in M}$ は, 座標変換が C^r 級であることが確かめられて, M の C^r 級座標近傍系になる. (問題)

命題 n 次元 C^r 級多様体 N の m 次元部分多様体 M からの包含写像 $i:M\hookrightarrow N$ は埋め込みである. (問題)

系 N,P を C^r 級多様体, M を N の部分多様体, $f:N\to P$ を C^r 級写像とするとき $f|_M=f\circ i$ も C^r 級.

(仮称) 局所埋め込み定理 D を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $f':D\to\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}=f'(\boldsymbol{x})$ を C^r 級写像 $(r\geqq 1)$, $m<n$, $n=m+k$, $\boldsymbol{x}_0$ を f' の正則点 ($\operatorname{rank}Jf'_{\boldsymbol{x}_0}=m$), $\boldsymbol{y}_0:=f'(\boldsymbol{x}_0)$ とするとき, $(\boldsymbol{x}_0,\mathbf{0})\in D\times\mathbb{R}^k\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k=\mathbb{R}^n$ の開近傍 $U'\times W'$, $\boldsymbol{y}_0\in\mathbb{R}^n$ の開近傍 V', 及び微分同相 $g:V'\to U'\times W'$ が存在して, $g(f'(\boldsymbol{x}))=\iota(\boldsymbol{x}):=(\boldsymbol{x},\mathbf{0})$ $(\boldsymbol{x}\in U')$ をみたす. 従って, $f'|_{U'}$ は U' $(=U'\times\{\mathbf{0}\})$ と 像 $f'(U')$ の間の微分同相であり, 埋め込みである.

定理 (はめ込み) $f:M^m\to N^n$ が (C^r 級) はめ込みのとき, 各点 $p\in M$ の周りの座標近傍 (U,φ) と $f(U)$ を含む N の座標近傍 $(V,\psi:V\to V')=(V;y_1,\ldots,y_n)$ が存在して $\psi(f(U))=V'\cap(\mathbb{R}^m\times\{\mathbf{0}\})$, 即ち

$$(*)\qquad f(U)=\{q\in V\mid \psi(q)=(y_1,\ldots,y_m,0,\ldots,0)\in V'\}\underset{\text{略記して}}{=}\{(y_1,\ldots,y_n)\in V\mid y_{m+1}=\cdots=y_n=0\}$$

をみたし, $f|_U:U\to N$ は埋め込みで, 局所座標表示は $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x})=\iota(\boldsymbol{x}):=(\boldsymbol{x},\mathbf{0})$. ($m=n$ の時は $f(U)=V$.)

証明 p を含む座標近傍 $(\tilde{U},\tilde{\varphi})\in\tilde{\mathcal{S}}$ と $f(\tilde{U})\subset\tilde{V}$ となる $(\tilde{V},\tilde{\psi})\in\tilde{\mathcal{T}}$ をとり, f の局所座標表示 $f':=\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1}:\tilde{U}'\to\tilde{V}'\subset\mathbb{R}^n$ に, $\boldsymbol{x}_0:=\varphi(p)$, $\boldsymbol{y}_0:=f'(\boldsymbol{x}_0)=\tilde{\psi}(f(p))$ として直前の定理を適用し, 開近傍 $\boldsymbol{x}_0\in U'\subset\tilde{U}'$, $\mathbf{0}\in W'\subset\mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{y}_0\in V''\subset\tilde{V}'$ と微分同相 $g:V''\to U'\times W'$ をえる. このとき $V':=U'\times W'$, $U:=\tilde{\varphi}^{-1}(U')$, $\varphi=\tilde{\varphi}|_U$, $V:=\tilde{\psi}^{-1}(V'')=(g\circ\tilde{\psi})^{-1}(V')$, $\psi:=g\circ\tilde{\psi}|_V:V\overset{\approx}{\to}V''\overset{\cong}{\to}U'\times W'=:V'\subset\mathbb{R}^n$ とおくと, (U,φ) は M の, (V,ψ) は N の座標近傍で, (図式)

$$(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x})=(g\circ(\tilde{\psi}\circ f\circ\varphi^{-1}))(\boldsymbol{x})=g(f'(\boldsymbol{x}))=\iota(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\mathbf{0})\in U'\times W'=:V'\subset\mathbb{R}^n\quad(\boldsymbol{x}\in U').$$

従って, $\psi(f(U))=\psi(f(\varphi^{-1}(U')))=U'\times\{\mathbf{0}\}=V'\cap(\mathbb{R}^m\times\{\mathbf{0}\})$. これは $(*)$ を表す. 更に $f|_U:U\to f(U)$ は

$$f|_U=\psi^{-1}\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi\underset{\text{上の変形}}{=}(\psi^{-1}|_{U'})\circ\iota\circ\varphi$$

より (像への) 同相写像の合成なので同相, 従って $f|_U$ は埋め込みである. $m=n$ のときは f' に逆関数定理によりえられる微分同相 $g=f'|_{U'}^{-1}:V''\to U'$ を用いて $V':=U'$, $\psi:=g\circ\tilde{\psi}|_V$ とすれば $f(U)=\psi^{-1}((g\circ f')(U'))=\psi^{-1}(V')=V$.

(**注**) ここで f が C^s 級とすると $f',\tilde{f}$ が C^s 級 $\Rightarrow g,\psi=g\circ\tilde{\psi}|$ が C^s 級より (V,ψ) は C^s 級座標近傍になる.

従って r は始めから M,N,f の一番低い微分可能性に揃えて考えておけばよい.

定理 (埋め込み) $f: M \to N$ が m 次元 C^r 級多様体 M から n 次元 C^r 級多様体への埋め込みとするとき, 各点 $q \in f(M)$ を含む C^r 級座標近傍 $(V, \psi: V \to V') = (V; y_1, \ldots, y_n)$ で, $\psi(f(M) \cap V) = V' \cap (\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{0}\})$, 即ち

$(**)$ $\qquad f(M) \cap V = \{\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in V \mid y_{m+1} = \cdots = y_n = 0\} \qquad (m = n$ のときは $f(M) \cap V = V)$

となるものが存在する. 従って像 $f(M)$ は N の部分多様体であり, $f: M \to f(M)$ は C^r 級微分同相である.

証明 前定理の $(*)$ をみたす U, (V, ψ) をとり, (V, ψ) を $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ とおく. $f: M \to f(M)$ は同相なので $f(U)$ は $f(M)$ の相対開集合. $\therefore$ $f(U) = f(M) \cap O$ となる N の開集合 O がある. そこで $V := \tilde{V} \cap O$, $\psi := \tilde{\psi}|_V$ とおけば $f(M) \cap V = f(M) \cap O \cap \tilde{V} = f(U)$ で, $f(U)$ が $(*)$ をみたすことより $f(M) \cap V$ は $(**)$=[S] をみたすので $f(M)$ は部分多様体である. f の, (U, φ), (V, ψ) に関する局所座標表示は $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = g \circ f' = \iota$ で, 逆写像は $1_{U'}$ より C^r 級.
(微分同相の別証: $f: M \to f(M)$ は C^r 級かつ同相で各点で正則なので逆関数定理より微分同相.)

例 正則値の定理により得られる多様体は部分多様体である.

証明 $f: N^n \to \mathbb{R}^k$ は C^r 級, $\mathbf{0}$ を f の正則値, $M := f^{-1}(\mathbf{0})$, $m := n-k > 0$ とする (M は m 次元). このとき $p \in M$ を含む N の座標近傍 $(\tilde{V}, \tilde{\psi}) = (\tilde{V}, \boldsymbol{x}) = (\tilde{V}; x_1, \ldots, x_n)$ で, 局所座標表示 $f' := f \circ \tilde{\psi}^{-1}: \tilde{V}' \to \mathbb{R}^k$ の Jacobi 行列の第 $n-k+1$ 列 $\sim$ 第 n 列の k 個の列が一次独立になる様なものをとる. f' に陰関数定理 (I) を適用し, $\boldsymbol{x}^1 := (x_1, \ldots, x_m)$ とすれば, 開近傍 V'', U', W' ($\boldsymbol{x}_0 := \tilde{\psi}(p) \in V'' \subset \tilde{V}'$, $\boldsymbol{x}_0^1 \in U' \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{0} \in W' \subset \mathbb{R}^k$ と微分同相 $\tilde{f} (= g^{-1}) : V'' \to U' \times W'$, $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^1, f'(\boldsymbol{x}))$ をえる. $V := \tilde{\psi}^{-1}(V'')$, $V' := U' \times W'$, $\psi := \tilde{f} \circ \tilde{\psi}: V \to V'' \to U' \times W' =: V'$ とすれば, $q \in V$, $\tilde{\psi}(q) = \boldsymbol{x}$ に対し, $q \in V \cap M \Leftrightarrow f'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \psi(q) = \tilde{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^1, \mathbf{0})$ より [S] をみたし, M は部分多様体.

補題 N, P を C^r 級多様体, M を N の部分多様体, $i: M \hookrightarrow N$ を包含写像とする. $f: P \to M$ に対し次は同値:
(1) f は C^r 級. $\qquad$ (2) $i \circ f: P \to M \to N$ は C^r 級.

証明 (1) $\Rightarrow$(2): i, f は C^r 級より $i \circ f$ も C^r 級. (2) $\Rightarrow$(1): P の各点 p を含む座標近傍 (W, μ) と [S] をみたす N の座標近傍 (V, ψ) で $f(W) \subset V$ なるものを取り, $U := M \cap V, \varphi := \psi|_U = \psi \circ i$ とすると局所座標表示は $\varphi \circ f \circ \mu^{-1} = (\psi \circ i) \circ f \circ \mu^{-1} = \psi \circ (i \circ f) \circ \mu^{-1}$ で, 右辺は (2) より C^r 級なので f も C^r 級.

• M の部分空間 P 上の写像 $f: P \to N$ が **C^s 級**とは, P のある開近傍 W 上の C^s 級写像 $\tilde{f}: W \to N$ の制限 $f = \tilde{f}|_P$ になるとき, と定義する. また, 写像 $f: M \to N$ が **P において C^s 級**とは P のある開近傍 W 上で $f|_W$ が C^s 級のときをいう. とくに $P = \{p\}$(一点空間) のときは **点 p において C^s 級**という.
· この用語を用いれば, 連続写像 $f: M \to N$ が C^s 級 $\longleftrightarrow$ f は各点 p において C^s 級.

単射はめ込みだが埋め込みにならない例 $f: \mathbb{R} \to T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ を $j_\alpha(t) := (e^{2\pi i t}, e^{2\pi \alpha i t})$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ は はめ込みである. (微分同相 $e: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to S^1 \times S^1$, $e([x, y]) := (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ により T^2 を $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ と見なすと $j_\alpha(t) = (t, \alpha t)$.) $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ (無理数) のとき, j_α は単射であるが (これは容易に分る), 像 $j_\alpha(\mathbb{R})$ は T^2 の稠密部分集合になり $\mathbb{R}$ とは同相にならないことが知られている. なお, $\alpha = p/q$ (有理数) のとき, j_α は単射ではないが埋め込み $\bar{j}_\alpha: \mathbb{R}/q\mathbb{Z} \to T^2$ を誘導し, 像 $j_\alpha(\mathbb{R})$ は S^1 と微分同相な T^2 の部分多様体 になる. (p/q は既約とし, $\alpha = 0 \Rightarrow q = 1$ とする.)

(注) ここの埋め込みを「正則埋め込み」(regular immbedding), 単射はめ込みを「埋め込み」といい, 単射はめ込みによる像を部分多様体, ここの部分多様体を正則 (正規) 部分多様体 (regular submanifold) と呼ぶ本もある.
この用語では, 例の j_α は α が無理数のときは 埋め込みであり, 像 $j_\alpha(\mathbb{R})$ は部分多様体になる.

Whitney の定理 (1936) 第二可算公理をみたす m 次元 C^r 級多様体 M について, $n \geqq 2m$ のとき, 任意の連続写像 $f: M \to \mathbb{R}^n$ は C^r 級はめ込みで近似できる. 特に, C^r 級はめ込み $f: M \looparrowright \mathbb{R}^{2m}$ が存在する.
また, C^r 級埋め込み $f: M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ で $f(M)$ が $\mathbb{R}^{2m+1}$ の閉集合 ($\therefore$ 閉部分多様体) になるものが存在する.
さらに $f(M)$ が C^∞ 級, 及び C^ω 級閉部分多様体になるものが存在する.

命題 $M = (M^n, \mathcal{S})$ を C^r 級多様体, $N = (N^n, \mathcal{T})$ を $C^{r'}$ 級多様体 ($\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{T} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$), $f: M^n \to N^n$ を (C^0 級) 同相写像とする. (M, N は n 次元.) このとき,
(1) $f^{-1}\mathcal{T} := \{(f^{-1}(V_\beta),\ \psi_\beta \circ f: f^{-1}(V_\beta) \overset{\approx}{\to} V_\beta \overset{\approx}{\to} V'_\beta)\}_{\beta \in B}$ と定めると $f^{-1}\mathcal{T}$ は M の $C^{r'}$ 級座標近傍系になる.
(2) $1 \leqq s \leqq r \leqq r'$ のとき次は同値:
(i) f は C^s 級微分同相. $\qquad$ (ii) $\mathcal{S}$ と $f^{-1}\mathcal{T}$ は M に同じ C^s 級微分構造を定める.
(即ち, $[\mathcal{S}]_s = [f^{-1}\mathcal{T}]_s \leftrightarrow$ 座標変換 $\varphi_\alpha \circ (\psi_\beta \circ f)^{-1}, (\psi_\beta \circ f) \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は共に C^s 級.)

系 C^r 級埋め込み $f: M^m \to \mathbb{R}^n$ で, $f(M)$ が $\mathbb{R}^n$ の C^∞ 級 (C^ω 級) 部分多様体になるものがが存在する. $\Longrightarrow$ M 上に $[\mathcal{S}]_r = [\mathcal{S}']_r$ となる C^∞ 級 (C^ω 級) 微分構造 $\mathcal{S}'$ が存在する.

定義 m 次元多様体 M から n 次元 C^r 級多様体 N への C^r 級写像 $f: M \to N$ $(m \geqq n)$ が全ての点 $p \in M$ で $\operatorname{rank}_p f = n$ (M の全ての点が正則点, N の全ての点が正則値) のとき, f を **沈め込み (submersion)** という.