商空間で多様体になる例：射影空間 (projective space)

[商空間] 位相空間 X から 集合 Y への**全射** $\pi : X \to Y$ が与えられたとき, Y の位相を

$$W \subset Y \text{ が } Y \text{ の開集合} \longleftrightarrow \text{逆像 } \pi^{-1}(W) \text{ が } X \text{ の開集合}$$

で定め, この位相を π により定まる**商位相**といい, 位相空間 Y を**商空間** という. Y が位相空間で, その位相が π により定まる商位相に一致するとき π を **商写像** という. X 上の同値関係 $\sim$ が与えられたとき, $X/\sim$ に射影 $\pi : X \to X/\sim$ により定まる商位相をいれ, $X/\sim$ を同値関係 $\sim$ による **商空間** (または**等化空間**) という.

定理 Q 位相空間 X, Z の間の連続写像 $f : X \to Z$ が, X の同値関係 $\sim$ による商空間 $X/\sim$ からの写像 $\bar{f} : X/\sim \to Z$ を誘導する $\implies$ $\bar{f}$ は連続. (商空間からの写像の連続性を示すにはこれを使う.)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/\sim \arrow[r, "\bar{f}"'] & Y \end{tikzcd}$$

· $\bar{f}$ は多くの場合, f と $X/\sim$ の代表元 $[x]$ $(x \in X)$ を用いて $\bar{f}([x]) := f(x)$ と定義される.
$\bar{f}$ が実際に写像になっていることを「$\bar{f}$ は well-defined」($\bar{f}$ の定義は妥当) といい, これを示すには $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$ を示す必要がある. このとき $f = \bar{f} \circ \pi$ で, f が連続なら $\bar{f}$ も連続.
(更に $f(x) = f(x') \implies x \sim x'$ なら $\bar{f}$ は単射.)

例 (実射影空間) $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \backslash \{0\}$ $(= \mathbb{R} - \{0\})$, $S^0 := \{\pm 1\}$ は共に積に関して群であり, スカラー倍により $\mathbb{R}^\times$ は $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ に, S^0 は n 次元単位球面 $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ に作用している. $(x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\},\ s \in \mathbb{R}^\times \Rightarrow sx = (sx_1, \ldots, sx_{n+1}).)$ このとき, $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$, S^n 上の同値関係 $\underset{\mathbb{R}}{\sim}$, $\underset{\mathrm{S}}{\sim}$ を

$$x \underset{\mathbb{R}}{\sim} y \ (x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) \iff \exists s \in \mathbb{R}^\times \ (y = sx), \qquad x \underset{\mathrm{S}}{\sim} y \ (x, y \in S^n) \iff y = \pm x \ \ (\pm 1 \in S^0)$$

で定め (同値関係になることを示せ), この商空間をそれぞれ $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, S^n/S^0, 射影を $\pi_{\mathbb{R}}, \pi_S$ と表す:

$$\pi_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) / \underset{\mathbb{R}}{\sim}, \qquad \pi_S : S^n \to S^n/S^0 := S^n / \underset{\mathrm{S}}{\sim}$$

次に, 包含写像を $\iota : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ とし, $\pi_{\mathbb{R}} \circ \iota : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ から誘導される連続写像を $\bar{\iota} : S^n/S^0 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ とするとき, $\bar{\iota}$ により S^n/S^0 と $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ が標準的に同相である事を示す.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook, shift left, "\iota"] \arrow[d, "\pi_S"'] & \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \arrow[l, shift left, "r"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{R}}"] \\ S^n/S^0 \arrow[r, shift left, "\bar{\iota}"] & \mathbb{R}\mathrm{P}^n \arrow[l, shift left, "r"] \end{tikzcd}$$

$r : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to S^n$ を $r(x) := x/|x|$ とすると, r の各成分関数は初等関数なので r は連続で $r \circ \iota = 1_{S^n}$. $\pi_S \circ r : (\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) \to S^n/S^0$ の誘導する写像 $\bar{r} : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to S^n/S^0$ も連続で, $\iota \circ r(x) = x/|x| \underset{\mathbb{R}}{\sim} x$ より $\bar{\iota} \circ \bar{r} = 1_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}$. $\bar{r} \circ \bar{\iota} = 1_{S^n/S^0}$ と合わせて $\bar{\iota}$ は同相である.
$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は n 次元**実射影空間** (real projective space) といわれ, $\bar{\iota}$ により S^n/S^0 と同一視される.
実際, $[x] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n = S^n/S^0$ の代表元 x を $|x| = 1$ ととるか $x \neq 0$ と取るかの違いしかない.
S^n はコンパクトなので, 連続像である $S^n/S^0 = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ はコンパクト.
元 $[x]$ は $(x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1})$ と, 比の記号を用いても表され, $(n+1)$ 連比と見なされる. これは**同次座標**といわれる.
$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は $(n+1)$ 連比全体の空間とみなされる. また, $[x]$ は x と原点を通る直線 $= 1$ 次元線形部分空間ともみなされ, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は原点を通る直線全体の空間といわれる. なお, $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ は実**射影直線**, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ は実**射影平面**ともいわれる.

$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = S^n/S^0$ が Hausdorff 空間であることは比較的容易に直接示せる. (これを示せ.) 次頁の様な方法でも示せる.

$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の座標近傍系 座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n)\}_{i=1}^{n+1}$ を, 以下の $\widehat{\ }$ はこの部分を省くとして,

$$U_i := \{[x] = [x_1, \ldots, x_{n+1}] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid x_i \neq 0\}, \quad \varphi_i([x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n+1}]) := \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

と定める. ($x_i \neq 0$ は代表元の取り方によらず, $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(U_i) = \{x | x_i \neq 0\}$ は $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ の開集合.
$[x] = [x_1/x_i, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, x_{n+1}/x_i]$ で第 i 座標が 1 になる代表元は一意的に定まり, $\varphi_i([x])$ は i 番目の $x_i/x_i = 1$ を省いたもの.) 逆写像は $\varphi_i^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = [y_1, \ldots, y_{i-1}, \overset{i}{1}, y_i, \ldots, y_n]$.
座標変換: $i < j$ とし, $U_{ij} := U_i \cap U_j = \{[x_1, \ldots, x_{n+1}] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid x_i \neq 0, x_j \neq 0\}$, $U'_{ij} = \varphi_i(U_{ij}) = \{(y_1, \ldots, y_n) \mid y_{j-1} \neq 0\}$. $z = (z_1, \ldots, z_n) = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \varphi_j([y_1, \ldots, \overset{i}{1}, y_i, \ldots, \overset{j}{y_{j-1}}, \ldots, y_n]$ $(y_{j-1} \neq 0)$ より

$$z = (z_1, \ldots, z_n) = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{y_1}{y_{j-1}}, \ldots, \frac{\overset{i}{1}}{y_{j-1}}, \ldots, \widehat{\frac{\overset{j}{y_{j-1}}}{y_{j-1}}}, \ldots, \frac{y_n}{y_{j-1}}\right)$$

$y = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(z_1, \ldots, z_n) = \varphi_i([z_1, \ldots, \overset{i}{z_i}, \ldots, \overset{j}{1}, z_j, \ldots, z_n]$ $(z_i \neq 0)$ より

$$y = (y_1, \ldots, y_n) = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(z_1, \ldots, z_n) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \widehat{\frac{\overset{i}{z_i}}{z_i}}, \ldots, \frac{\overset{j}{1}}{z_i}, \frac{z_j}{z_i} \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

これらの座標変換が C^∞ 級なので $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は C^∞ 級多様体になる.

軌道空間 群 G と位相空間 X ついて, $\mu : G\times X \to X,\ gx := \mu(g,x)$ が, $g,h\in G,\ x\in X$ と G の単位元 1 に対し

$$\text{(i) } g(hx) = (gh)x, \qquad \text{(ii) } 1x = x$$

をみたし, $L_g(x) := gx,\ L_g : X \to X$ が同相写像のとき $X = (X,\mu)$ を左 G **空間** といい, G は X に左から**作用**するという. G 空間 X 上の同値関係:

$$x \sim y \longleftrightarrow y = gx \text{ をみたす } g\in G \text{ が存在する}$$

による商空間 $X/\sim$ を X/G と表し**軌道空間** (orbit space) という. 又 x の同値類 $Gx := \{gx\in X \mid g\in G\}$ を x の G **軌道** という. (X/G は G 軌道全体の空間.) 射影を $\pi : X \to X/G$ とする.

実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は, 群 $\mathbb{R}^\times$ (S^0) の $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ (S^n) へのスカラー倍作用による軌道空間である. ($G=\mathbb{R}^\times, S^0$, $X=\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}, S^n$ とすると, $\mu : G\times X \to X$ は C^∞ 級で, Lie 群 G の C^∞ 級多様体 X への C^∞ 級作用といわれる.)

例 (複素射影空間) $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ に替えて同様に, $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C}\backslash\{0\} \supset S^1 := \{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ は共に複素数の積に関して群になっていて, スカラー倍で $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$, $S^{2n+1} := \{x\in\mathbb{C}^{n+1} \mid \|x\|=1\}$ に作用している. この作用による軌道空間を **複素射影空間**といい, $\mathbb{C}\mathrm{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\})/\mathbb{C}^\times$, S^{2n+1}/S^1 と表す. 即ち $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ は $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ 上の同値関係「$z \sim_{\mathbb{C}} w$ $(z,w\in\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}) \longleftrightarrow w = sz$ となる $s\in\mathbb{C}^\times$ がある」による商空間. (S^{2n+1}/S^1 は同値関係「$z\sim_T w \leftrightarrow \exists s\in S^1\,(w=sz)$」 による商空間.) これらも包含写像 $i : S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ の導く同相写像 $\bar{i} : S^{2n+1}/S^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $\bar{i}([z])=[z]$ により同一視される. 従って $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ もコンパクト. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ は複素**射影直線**, $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ は複素**射影平面**ともいわれる. 射影を $\pi_{\mathbb{C}} : (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ とする. $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ が Hausdorff 空間であることは後で示す. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ と同様に, 座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n)\}_{i=1}^{n+1}$ を次の様に定める.

$$U_i := \{[x] = [x_1,\dots,x_{n+1}] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \mid x_i \neq 0\}, \quad \varphi_i([x_1,\dots,x_i,\dots,x_{n+1}]) := \Big(\frac{x_1}{x_i},\dots,\widehat{\frac{x_i}{x_i}},\dots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\Big)$$

逆写像は $\varphi_i^{-1}(y_1,\dots,y_n) = [y_1,\dots,y_{i-1},\overset{i}{1},y_i,\dots,y_n]$.

座標変換は $i<j$ のとき, $U_{ij} := U_i\cap U_j$ $U'_{ij} = \varphi_i(U_{ij}) \ni y = (y_1,\dots,y_n)$, $(y_{j-1}\neq 0)$,

$U'_{ji} = \varphi_j(U_{ij}) \ni z = (z_1,\dots,z_n)$ $(z_i \neq 0)$ として,

$$z = \varphi_j\circ\varphi_i^{-1}(y) = \Big(\frac{y_1}{y_{j-1}},\dots,\frac{\overset{i}{1}}{y_{j-1}},\dots,\widehat{\frac{\overset{j}{y_{j-1}}}{y_{j-1}}},\dots,\frac{y_n}{y_{j-1}}\Big), \quad y = \varphi_i\circ\varphi_j^{-1}(z) = \Big(\frac{z_1}{z_i},\dots,\widehat{\frac{\overset{i}{z_i}}{z_i}},\dots,\frac{\overset{j}{1}}{z_i},\frac{z_j}{z_i}\dots,\frac{z_n}{z_i}\Big)$$

一般に $c=a+\boldsymbol{i}b, w=u+\boldsymbol{i}v\in\mathbb{C}$, $w\neq 0$ のとき $c/w = c\bar{w}/|w|^2 = (au+bv)/(u^2+v^2) + \boldsymbol{i}(bu-av)/(u^2+v^2)$ よりこれらの座標変換の成分関数の実部, 虚部が C^∞ 級なので, $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ は $2n$ 次元 C^∞ 級多様体になる.

Hausdorff 性 $n+1$ 次複素正方行列全体 $M(n+1;\mathbb{C})$ の部分空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}_n$ を, $X^* := {}^t\bar{X}$ (随伴行列) として,

$$\mathbb{C}\mathrm{P}_n := \{X \in M(n+1;\mathbb{C}) \mid X^* = X,\ X^2 = X,\ \mathrm{tr}\,X = 1\},$$

$f : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}_n$ を, x は列ベクトル ${}^t(x_1,\dots,x_{n+1})$ で表されるとして,

$$f(x) := \frac{1}{|x|^2}x\,x^* = \frac{1}{|x|^2}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1}\end{bmatrix}(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{n+1}) = \frac{1}{|x|^2}(x_i\bar{x}_j) \qquad \Big(E_{11} = (\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \\ \vdots & & \ddots\end{bmatrix}\Big)$$

と定めると, f は C^∞ 級で, 連続写像 $\bar{f} : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}_n$ を誘導する.

補題 $X \in \mathbb{C}\mathrm{P}_n \iff X$ はある $P\in U(n+1)$ により $X = PE_{11}P^*$ と表せる.

証明 $X \in \mathbb{C}\mathrm{P}_n$ はエルミート行列 $(X^*=X)$ より, ある unitary 行列 $P\in U(n+1)$ により対角化される: $(P^{-1}XP =: D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}))$. $X = X^2$ より $D = D^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2,\dots,\lambda_{n+1}^2)$. $\lambda_i^2 = \lambda_i$ より $\lambda_i = 0,1$. $\mathrm{tr}\,X = \sum_i \lambda_i = 1$ より $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$ となる様 P の列を並べておけば $D = \mathrm{diag}(1,0,\dots,0) = E_{11}$. $P^{-1}XP = E_{11}$ より $X = PE_{11}P^{-1} = PE_{11}P^*$. 逆は $PE_{11}P^*$ が $\mathbb{C}\mathrm{P}_n$ の条件をみたす事を確かめるだけ. □

f の全単射性 P の第 1 列を x とおけば $|x|^2 = 1$, $X = PE_{11}P^* = x\,x^* = f(x)$ より $f, \bar{f}$ は全射. $f(x) = |x|^{-2}(x_i\bar{x}_j)$ の (i,i) 成分は $x_i\bar{x}_i/|x|^2 = |x_i|^2/|x|^2$. $f(x) = f(y)$, $y = {}^t(y_1,\dots,y_{n+1})$ とすれば, $x_i \neq 0$ のとき $|x_i|/|x| = |y_i|/|y|$. $\therefore s\,x_i/|x| = y_i/|y|$ となる $s\in S^1$ がある. $\zeta := s|y|/|x| \in \mathbb{C}^\times$ とおくと $y_i = x_i\zeta$. これを (j,i) 成分の等式 $x_j\bar{x}_i/|x|^2 = y_j\bar{y}_i/|y|^2$ に代入して $x_j/|x| = \bar{s}y_j/|y|$ より $y_j = x_j s|y|/|x| = x_j\zeta$. $\therefore y = \zeta x$. 即ち, $f(x) = f(y) \Rightarrow x \sim_{\mathbb{C}} y$ より f は単射.

以上より $\bar{f} : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}_n$ はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続全単射より同相で, 特に $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ は Hausdorff 空間である. ($\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ も同様にして示せる.) 尚, $\mathbb{C}\mathrm{P}_n$ の C^∞ 級座標近傍系 $\{(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)\}_{i=1}^{n+1}$ は,

$$\tilde{U}_i := \{X = (x_{ij}) \in \mathbb{C}\mathrm{P}_n \mid x_{ii} \neq 0\}, \quad \tilde{\varphi}_i(X) := \Big(\frac{x_{1i}}{x_{ii}},\dots,\widehat{\frac{x_{ii}}{x_{ii}}},\dots,\frac{x_{n+1,i}}{x_{ii}}\Big)$$

(X の第 i 列を x_{ii} で割って $x_{ii}/x_{ii} = 1$ を除いたもの.)