多様体上の可微分関数と多様体間の可微分写像

以下, $M=(M^m,\mathcal{S})$ を m 次元の, $N=(N^n,\mathcal{T})$ を n 次元の C^r 級多様体, $\mathcal{S}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, $\mathcal{T}=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ とし, $\mathcal{S},\mathcal{T}$ の定める極大座標近傍系をそれぞれ $\tilde{\mathcal{S}},\tilde{\mathcal{T}}$ とする. また, 以下 $1\leqq s\leqq r$ とする.

(注) $\mathbb{R}^m$ の開集合 D 上の関数や写像 $f:D\to\mathbb{R}^n$ について: f は C^s 級 $\Leftrightarrow\forall\boldsymbol{x}\in D$ に対し開近傍 $U'\subset D$ で $f|_{U'}$ が C^s 級となるものが存在 $\Leftrightarrow\forall\boldsymbol{x}\in D$, $\forall$ 開近傍 $U'\subset D$ に対し $f|_{U'}$ は C^s 級, が成り立つ..

定義 連続 (=C^0 級) 関数 $f:M\to\mathbb{R}$ が**点** $p\in M$ **で** C^s **級** $\longleftrightarrow$ p の周りの座標近傍 $(U,\varphi)\in\tilde{\mathcal{S}}$, $p\in U$ で,

$$f':=f\circ\varphi^{-1}:U':=\varphi(U)\xrightarrow{\varphi^{-1}}U\subset M\xrightarrow{f}\mathbb{R}\qquad(U'\subset\mathbb{R}^m)$$

が C^s 級となるものが存在するとき. f' を (U,φ) に関する f の**局所座標表示**という.

定義 $f:M\to\mathbb{R}$ が C^s **級** $\longleftrightarrow$ 全ての点 $p\in M$ で f が C^s 級. (注: f の連続性はこの定義より出る. (問))

• $f:M\to\mathbb{R}$ が C^s 級 $\Rightarrow\forall(\tilde{U},\tilde{\varphi})\in\tilde{\mathcal{S}}$, $\forall p\in\tilde{U}$ に対し, $f\circ\varphi^{-1}$ が C^s 級となる $(U,\varphi)\in\tilde{\mathcal{S}}$, $p\in U$ が存在するが, $\tilde{\varphi}(\tilde{U}\cap U)\subset\mathbb{R}^m$ 上 $f\circ\tilde{\varphi}^{-1}=(f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合からの C^s 級関数と C^r 級写像の合成なので C^s 級, これが各点 $p\in\tilde{U}$ で成り立つので $f\circ\tilde{\varphi}^{-1}:\tilde{U}'\to\mathbb{R}$ は C^s 級. 即ち, 任意の $(\tilde{U},\tilde{\varphi})\in\tilde{\mathcal{S}}$ に対し, $f\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ は C^s 級.

• 特に, 全ての $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathcal{S}$ に対し, $f':=f\circ\varphi_\alpha^{-1}:U'_\alpha\to\mathbb{R}$ が C^s 級 $\Leftrightarrow f:M\to\mathbb{R}$ が C^s 級. (問)

$s\leqq r=0,1,\ldots,\infty\,(,\omega)$ について M 上の C^s 級関数全体を $C^s(M)=C^s(M,\mathbb{R})$ と表す.

M 上の C^s 級関数 f,g の和 $f+g$, 実数倍 sf , 積 $f\cdot g$, ($f(p)\neq0$ となる開集合上で) 商 g/f が,

$$(f+g)(p):=f(p)+g(p),\ (sf)(p):=s\cdot f(p),\ (f\cdot g)(p):=f(p)\cdot g(p),\ (g/f)(p):=g(p)/f(p)$$

で定義され C^s 級になる. (問)

M の開集合 W は $(M,\mathcal{S})$ の C^r 級開部分多様体なので W 上の C^s 級関数 $f:W\to\mathbb{R}$ も同様に定義される. W が点 $p\in M$ の開近傍のとき C^s 級関数 $f:W\to\mathbb{R}$ を p の周りの **局所** (C^s 級) 関数ともいう.

p の周りの局所 C^s 級関数 $f:W_1\to\mathbb{R}$, $g:W_2\to\mathbb{R}$ の和, 実数倍, 積 (, 商) は $W_1\cap W_2$ 上で定義される.

定義 C^r 級多様体間の連続 (=C^0 級) 写像 $f:M\to N$ が**点** $p\in M$ **で** C^s **級** $\longleftrightarrow$ p と $f(p)$ の周りの座標近傍 $(U,\varphi)\in\tilde{\mathcal{S}},p\in U$, $(V,\psi)\in\tilde{\mathcal{T}},f(U)\subset V$ が存在して, $(U,\varphi),(V,\psi)$ に関する f の**局所座標表示**

$$f':=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:U'\xrightarrow{\varphi^{-1}}U\xrightarrow{f}V\xrightarrow{\psi}V':=\psi(V)\subset\mathbb{R}^n\quad\text{が } C^s \text{ 級.}$$

定義 連続写像 $f:M\to N$ が C^s **級** $\longleftrightarrow$ 全ての点 $p\in M$ で f が C^s 級. (注: この連続性も定義より出る. (問))

• この定義より C^s 級関数のときと同様に, 任意の $(\tilde{U},\tilde{\varphi})\in\tilde{\mathcal{S}}$, $(\tilde{V},\tilde{\psi})\in\tilde{\mathcal{T}}$, $f(\tilde{U})\cap\tilde{V}\neq\emptyset$ に対し, $\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1}|_{\tilde{\varphi}(\tilde{U}\cap f^{-1}(\tilde{V}))}$ は C^s 級になる ($\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1}=(\tilde{\psi}\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})$). (問)

• $f:M\to N$ は, 各 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathcal{S}$, $p\in U_\alpha$ と $f(p)\in V_\beta$ なるある $(V_\beta,\psi_\beta)\in\mathcal{T}$ に対し $\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta))}$ が C^s 級になるならば, $U:=U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta)$, $V:=V_\beta$ とおけば f は M の各点 p で C^s 級, $\therefore f$ は C^s 級になる.

$N=\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ の座標系は標準座標系) のとき C^s 級関数の定義に一致する. また, 開区間 (a,b) から M への C^s 級写像を C^s **級曲線** (C^s **curve**) という. ($(a,b)=(-\varepsilon,\varepsilon)$ と取ることが多い.)

• (m=n) C^r 級多様体 M,N 間の同相写像 $f:M\to N$ が C^s **級微分同相** (C^s **diffeomorphism**) $\longleftrightarrow f,f^{-1}$ が共に C^s 級写像. また, M と N の間に C^r 級微分同相写像が存在するとき M と N は (C^r 級多様体として) **微分同相 (diffeomorphic)** であるという. このとき $f:M\xrightarrow[C^s]{\cong}N$, $f:M\overset{C^s}{\cong}N$, $M\cong N$, 等と表す.

(注) C^r 級微分同相 $f:M^m\to N^n$ が存在すれば M と N の次元は等しい ($m=n$).

($\because$) $p\in M$, $f(p)$ の周りの座標近傍をとり, 局所座標表示 f' と f'^{-1} の Jacobi 行列を $A:=Jf'_p$, $B:=Jf'^{-1}_{f(p)}$ とすれば, A は $n\times m$ 型, B は $m\times n$ 型で, $BA=E_m$, $AB=E_n$. この様な行列 A,B が存在すれば $m=n$ ($B=A^{-1}$).

命題 (合成写像) M,N,P を C^r 級多様体, $f:M\to N$, $g:N\to P$ を C^s 級写像とすると, $g\circ f$ も C^s 級になる.

証明 各 $p\in M$ に対し, $p,f(p),g(f(p))$ を含む C^r 級座標近傍 $(U,\varphi),(V,\psi),(W,\mu)$ で $f(U)\subset V$, $g(V)\subset W$ ($p\in U$, $f(p)\in V$, $g(f(p))\in W$, $\varphi:U\xrightarrow{\approx}U'\subset\mathbb{R}^m$, $\psi:V\xrightarrow{\approx}V'\subset\mathbb{R}^n$, $\mu:W\xrightarrow{\approx}W'\subset\mathbb{R}^\ell$) となるものをとれば, $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$, $\mu\circ g\circ\psi^{-1}$ が Euclid 空間の開集合間の C^s 級なのでその合成写像

$$(\mu\circ g\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})=\mu\circ g\circ(\psi^{-1}\circ\psi)\circ f\circ\varphi^{-1}=\mu\circ(g\circ f)\circ\varphi^{-1}$$

も C^s 級. $\therefore g\circ f$ は C^r 級多様体間の C^s 級写像.

(注) $M\subset\mathbb{R}^{m+k}$ を正則値の定理により得られた k 次元 C^r 級多様体とすると, 各点 $p\in M$ の開近傍 U で, $\mathbb{R}^k$ の開集合 U' と C^r 級微分同相 $g:U'\xrightarrow{\cong}U$ が存在するものが取れる. f を M のある近傍 W 上で定義された C^s 級写像 $f:W\to\mathbb{R}^\ell$ とすれば, 合成写像 $f\circ g:U'\to\mathbb{R}^\ell$ は (微積分学における合成写像の微分可能性定理により) C^s 級になる. 従って $f|_M:M\to\mathbb{R}^\ell$ は多様体間の写像として C^s 級になる. (ℓ=1, f が関数の時を含む.)

(微積分流の) **略記法** (微積分では (特に座標変換に関し) 写像の記号を節約し代わりに変数を明示することが多い.)
座標近傍 $(U,\varphi:U\to U')$ や $(U_\alpha,\varphi_\alpha:U_\alpha\to U'_\alpha)$ において $U',U'_\alpha\subset\mathbb{R}^m$ の座標系をそれぞれ $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)\in U'$, $\boldsymbol{x}^\alpha=(x_1^\alpha,\cdots,x_m^\alpha)\in U'_\alpha$ とするとき (φ 等を節約して,) (U,φ) や $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ の代わりに $(U,\boldsymbol{x})=(U;x_1,\cdots,x_m)$ や $(U_\alpha,\boldsymbol{x}^\alpha)=(U_\alpha;x_1^\alpha,\cdots,x_m^\alpha)$ と表す. ($(x_1,\cdots,x_m)$ 等が局所座標系.)
また, $\mathbb{R}^m$ の開集合 U' 上の関数 $(f\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x})=(f\circ\varphi^{-1})(x_1,\cdots,x_m)$ 等は, $f':=f\circ\varphi^{-1}$ として,

$$f'(\boldsymbol{x}),\qquad f'(x_1,\cdots,x_m)\qquad (f:M\to\mathbb{R}\text{ の}\textbf{局所座標表示})$$

と表す. (f が C^s 級 $\longleftrightarrow$ 各点の周りの C^r 級座標近傍 $(U;x_1,\cdots,x_m)$ で U' 上の関数 $f'(x_1,\cdots,x_m)$ が C^s 級.)
写像 $f:M\to N$ についても, 各 $p\in M$ を含む C^r 級座標近傍 (U,φ) と $f(U)\subset V$ となる (V,ψ) について, (U,φ) を $(U,\boldsymbol{x})=(U;x_1,\cdots,x_m)$, (V,ψ) を $(V,\boldsymbol{y})=(V;y_1,\cdots,y_n)$ と表し, **局所座標表示** $f':=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ を

$$f'(\boldsymbol{x})=f'(x_1,\cdots,x_m)=(f_1(x_1,\cdots,x_m),\ldots,f_n(x_1,\cdots,x_m))=(f_1(\boldsymbol{x}),\ldots,f_n(\boldsymbol{x}))$$

や

$$y_1=f_1(x_1,\cdots,x_m),\ \ldots,\ y_n=f_n(x_1,\cdots,x_m)$$

などと表す. ($f_1,\ldots,f_n$ は f' の成分関数で, f が C^s 級 $\Leftrightarrow\forall f_i$ が C^s 級.)
特に, 座標変換については, $U{=}V=U_\alpha\cap U_\beta$, $\varphi=\varphi_\alpha|_U,\psi=\varphi_\beta|_V$ と考えて, M の C^r 級座標近傍 (U,φ), (V,ψ) を $(U,\boldsymbol{x})=(U;x_1,\cdots,x_m)$, $(V,\boldsymbol{y})=(V;y_1,\cdots,y_m)$ と表すとき, 座標変換 $\psi\circ\varphi^{-1}:U'\to V'$, $\varphi\circ\psi^{-1}:V'\to U'$ は

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}),\ \ y_i=y_i(\boldsymbol{x})=y_i(x_1,\cdots,x_m),\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}),\ \ x_i=x_i(\boldsymbol{y})=x_i(y_1,\cdots,y_m)\quad (i=1,\ldots,m)$$

などと表されることが多い.
C^s 級曲線 $c:(a,b)\to M$ と $t_0\in(a,b)$, $p=c(t_0)$ を含む C^r 級座標近傍 $(U,\varphi)=(U,\boldsymbol{x})=(U;x_1,\cdots,x_m)$ については $\varphi\circ c:(a,b)\to U'\subset\mathbb{R}^m$ は

$$c(t)=(c_1(t),\ldots,c_m(t)),\quad x_i=c_i(t),\quad x_i=x_i(t)\quad (i=1,\ldots,m)$$

等と表される.
また, f' 等の $'$ を略して $f(\boldsymbol{x}),f(x_1,\cdots,x_m)$ 等と表されることも多い.

例 (包含写像) m 次元 C^r 級多様体 $(M,\mathcal{S})$ の開部分多様体 W の包含写像 $i:W\hookrightarrow M$ は局所座標系を $(U,\varphi)\in\mathcal{S}$, $(V,\psi):=(W\cap U,\varphi|_V)=(V,\boldsymbol{x})$ ととれば, 局所座標表示は $i'(\boldsymbol{x})=(x_1,\ldots,x_m)$ なので C^∞ 級より C^r 級.

例 (積多様体の射影) $(M,\mathcal{S})$, $(N,\mathcal{T})$ の積多様体 $M\times N$ の射影 $\pi_1:M\times N\to M$ も $(U,\boldsymbol{x})\in\mathcal{S}$, $(V,\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}$ に対する局所座標表示は $\pi_1'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x})$ なので C^∞ 級より C^r 級.

例 (正則値の定理により得られる多様体) C^r 級写像 $f:\mathbb{R}^{m+k}\to\mathbb{R}^m$ の正則値 c の逆像として得られる k 次元 C^r 級多様体 $M:=f^{-1}(c)$ の各点 $p\in M$ を含む座標近傍 (U,φ) として $\varphi:U\to U'\subset\mathbb{R}^k$ は $\mathbb{R}^{m+k}$ から k 個の座標への射影の制限, 逆写像 φ^{-1} は C^r 級写像 $g':U'\to\mathbb{R}^m$ のグラフへの写像 $g:U'\to M\subset\mathbb{R}^{m+k}$ (C^r 級) で与えられた.
このとき, M の $\mathbb{R}^{m+k}$ での開近傍 W からの C^s 級写像 $h:W\to\mathbb{R}^\ell$ の制限写像 $h|_M$ は, 座標近傍 (U,φ) に関する局所座標表示 $h\circ\varphi^{-1}=h\circ g:U'\to W\to\mathbb{R}^\ell$ が (微分法の合成写像の定理より) C^s 級写像になるので C^s 級.
なお, C^r 級多様体 $N\subset\mathbb{R}^\ell$ が正則値の定理により得られており, $h(M)\subset N$ のときは N の局所座標系 $\psi:V\to V'$ が射影の制限写像だから合成写像も (微分法の合成写像の定理より) C^s 級になるので $h|_M:M\to N$ も C^s 級.

階数 (rank) C^r 級多様体間の C^s 級写像 $f:M\to N$ について, 点 $p\in M$ における f の**階数** $\operatorname{rank}_p f$ を, p を含む M のある C^r 級座標近傍 (U,φ) と $f(U)\subset V$ となる N の C^r 級座標近傍 (V,ψ) について, 局所座標表示 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:U'\to V'$ の $\boldsymbol{x}=\varphi(p)$ における Jacobi 行列の階数と定義する:

$$\operatorname{rank}_p f:=\operatorname{rank}J(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\boldsymbol{x}}$$

このとき, $\operatorname{rank}_p f$ の定義は C^r 級座標近傍 (U,φ), (V,ψ) の取り方によらない, 即ち, もう一つの C^r 級座標近傍の組 $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$, $(\tilde{V},\tilde{\psi})$ で $p\in\tilde{U}$, $f(\tilde{U})\subset\tilde{V}$ となるものについて次が成り立つ. (問)

$$\operatorname{rank}J(\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1})_{\tilde{\varphi}(p)}=\operatorname{rank}J(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}$$

f の**特異点**, **正則点**, **特異値**, **正則値** 等を Euclid 空間の開集合の間の C^s 級写像と同様に定義する, 即ち, $\operatorname{rank}_p f<\min\{m,n\}$ のとき $p\in M$ を f の**特異点**, $\operatorname{rank}_p f=\min\{m,n\}$ のとき p の **正則点**といい, 特異点 p の像 $f(p)\in N$ を**特異値**, そうでない点 $q\in N$ を**正則値**という. $q\in N$ が正則値 $\Leftrightarrow\forall p\in f^{-1}(q)$ が正則点, または $q\notin f(M)$. また, $\operatorname{rank}_p f<n$ ($=$ 値域 N の次元) のとき, $p\in M$ を f の**臨界点**, $f(p)\in N$ を**臨界値**という.