行列の作る多様体 (古典群)

$M(n;\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$, $M(n;\mathbb{C})\cong M(n,2n;\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{2n^2}$ の部分空間で多様体 ($=C^\infty$ 級多様体) になっているものの例.
行列 $X=(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_n)=(x_{ij})\in M(n;\mathbb{R})$ を変数とする関数 $f(X)$ の gradient = Jacobi 行列 $Jf=\dfrac{\partial f}{\partial X}$ は, 変数 x_{ij} の並び順を指定して行ベクトルとして表示しても良いが, 行列 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)=:(f_{x_{ij}})$ やこれを列ベクトル分割した形 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}_1},\dots,\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}_n}\right)$ で表す方が (規則性等が) 見易いことが多い. 例えば, n=2 なら $Jf=\begin{pmatrix}f_{x_{11}} & f_{x_{12}}\\ f_{x_{21}} & f_{x_{22}}\end{pmatrix}$.
複素行列 $Z\in M(n;\mathbb{C})$, $Z=X+iY$ $(X,Y\in M(n;\mathbb{R}))$ は実 $n\times 2n$ 行列として $(X\,Y)=(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_n)=(x_{ij}\,y_{ij})$ と表し, 複素数値関数 $f(Z)$ は実部, 虚部の実数値関数 $g(X,Y),h(X,Y)$ により $f(Z)=g(X,Y)+\boldsymbol{i}h(X,Y)$, $f=(g,h):M(n,2n;\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$ と考えておき, g,h それぞれの gradient を実 $n\times 2n$ 行列として表すことにする.
なお, 行列 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in M(n,m;\mathbb{R})$ を実ベクトルと考えたときの内積は対応する成分の積の全ての和 $(A,B):=\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}$ である.

例 0 (一般線形群) $GL(n,\mathbb{R}):=\{A\in M(n;\mathbb{R})\mid \det A\neq 0\}\subset M(n;\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{C}):=\{A\in M(n;\mathbb{C})\mid \det A\neq 0\}\subset M(n;\mathbb{C})$ はそれぞれ $M(n;\mathbb{R}),M(n;\mathbb{C})$ の開部分多様体になる. 次元はそれぞれ $n^2,2n^2$.

例 1 (特殊線形群) $SL(n,\mathbb{R}):=\{A\in M(n;\mathbb{R})\mid \det A=1\}\subset M(n;\mathbb{R})$. $f(X):=\det X-1$ とおくと $SL(n,\mathbb{R})=f^{-1}(0)$. X の (i,j) 余因子を X_{ij} とすると $\det X$ の余因子展開は

$$\det X=x_{i1}X_{i1}+\cdots+x_{ij}X_{ij}+\cdots+x_{in}X_{in}\quad より\quad \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(X)=X_{ij}\quad \therefore\ Jf=(X_{ij}).$$

f の特異点は $Jf=(X_{ij})=O$ のときで, $O={}^t(X_{ij})X=(\det X)E_n$ より $\det X=0$. $\therefore$ f の特異値は $f(X)=\det X-1=-1$. $f(X)=0$ は正則値なので $SL(n,\mathbb{R})$ は $(n-1)$ 次元多様体になる.

例 1 $\mathbb{C}$: $SL(n,\mathbb{C}):=\{A\in M(n;\mathbb{C})\mid \det A=1\}\subset M(n,2n;\mathbb{R})$. $f(Z):=\det Z-1$, $g(X,Y):=\mathrm{Re}(\det Z-1)$, $h(X,Y):=\mathrm{Im}(\det Z)$ とおくと $SL(n,\mathbb{C})=f^{-1}(0)$. Z の (i,j) 余因子を $Z_{ij}=X_{ij}+\boldsymbol{i}Y_{ij}$ とすると
$f(Z)=\det Z-1=\sum_{j=1}^n(x_{ij}+\boldsymbol{i}y_{ij})(X_{ij}+\boldsymbol{i}Y_{ij})-1=:g(X,Y)+\boldsymbol{i}h(X,Y)$ より

$$\frac{\partial g}{\partial x_{ij}}+\boldsymbol{i}\frac{\partial h}{\partial x_{ij}}=X_{ij}+\boldsymbol{i}Y_{ij},\ \frac{\partial g}{\partial y_{ij}}+\boldsymbol{i}\frac{\partial h}{\partial y_{ij}}=-Y_{ij}+\boldsymbol{i}X_{ij},\quad Jg=\left(\frac{\partial g}{\partial x_{ij}};\frac{\partial g}{\partial y_{ij}}\right)=(X_{ij};-Y_{ij}),\ Jh=(Y_{ij};X_{ij}).$$

$Z\in SL(n,\mathbb{C})$, $\det Z=1$ のとき, 余因子展開式より全ての X_{ij},Y_{ij} が 0 になることはない. $(Jg,Jh\neq O)$. また, Jg と Jh の内積は $(Jg,Jh)=\sum_{i,j}X_{ij}Y_{ij}+(-Y_{ij}X_{ij})=0$ なので Jg と Jh は (ベクトルとして) 直交している. よって $\mathrm{rank}\,Jf=2$. 従って $SL(n,\mathbb{C})$ は $(2n^2-2)$ 次元多様体になる.

例 2 (直交群) $O(n):=\{A\in M(n;\mathbb{R})\mid {}^tA\,A=E\}\subset M(n;\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$. ${}^tA\,A=E\Leftrightarrow {}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j=(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=\delta_{ij}$ $(\forall\, i,j)$
$f:M(n;\mathbb{R})\to M(n;\mathbb{R})$, $f(X):={}^tX\,X-E$, $X=(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_n)=(x_{ij})\in M(n;\mathbb{R})$ と置けば $O(n)=f^{-1}(O)$.

$$f=(f_{ij}),\quad f_{ij}(X):=\sum_{k=1}^n x_{ki}x_{kj}-\delta_{ij}=(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)-\delta_{ij}\quad (i\leqq j)$$

ここで, ${}^t({}^tX\,X)={}^tX\,X\Leftrightarrow f_{ij}=f_{ij}$ より同じ式を省いて $i\leqq j$ となる $\frac{n(n+1)}{2}$ 個を考え, $f=(f_{ij})$ は $f:M(n;\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ とみなしておく. f_{ij} の Jacobi 行列は, $\cdots$ は $\boldsymbol{0}$ が並び, $i=1,\dots,n$, $0\leqq i<j\leqq n$ として

$$Jf_{ii}=(\boldsymbol{0}\cdots\overset{i}{2\boldsymbol{x}_i}\cdots\boldsymbol{0}),\quad Jf_{ij}=(\boldsymbol{0}\cdots\overset{i}{\boldsymbol{x}_j}\cdots\overset{j}{\boldsymbol{x}_i}\cdots\boldsymbol{0})\ (i<j)$$

これらが $X\in O(n)$ のとき一次独立になれば O が f の正則値になり, $n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ より $O(n)$ は $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元多様体. 尚, **特殊直交群** $SO(n):=\{A\in O(n)\mid \det A=1\}$ は $O(n)$ の開部分多様体.
これらの一次独立性の証明は, 次の補題を用いるのが便利である.

補題 G 内積空間 V のベクトルの組 $A=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k)$ に対し, $G_{i,j}:=(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)$ (内積) とし, $k\times k$ 行列 $G=G(A)$ を $G=G(A):=(G_{i,j})=((\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j))$ で定め **Gram 行列**といい, その行列式を **Gram 行列式** (Gramian) という.
このとき, $A=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k)$ が一次独立 $\Longleftrightarrow$ $\det G(A)\neq 0$ (Gramian $\neq 0$).
証明: $G=G(A)$ として対偶を示す. (ここでは内積は $(s\boldsymbol{a},t\boldsymbol{b})=s\bar{t}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, $(s,t\in\mathbb{C})$ をみたすものとするが $(s\boldsymbol{a},t\boldsymbol{b})=\bar{s}t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ としても一次独立, 従属性には影響しない.) $\det G=0\Leftrightarrow G$ の列ベクトル $(G_1\cdots G_k)$ は一次従属 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{s}=(s_1\cdots s_k)\in\mathbb{C}^k$, $\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{0}(\Leftrightarrow\bar{\boldsymbol{s}}\neq\boldsymbol{0})$, $\sum_{j=1}^k\bar{s}_jG_j=\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{s}$ がある $\Rightarrow 0=\sum_{j=1}^k\bar{s}_j(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=(\boldsymbol{a}_i,\sum_{j=1}^k s_j\boldsymbol{a}_j)$ $(\forall\, i)$

$$\Longrightarrow\ 0=\sum_{i=1}^k s_i(\boldsymbol{a}_i,\sum_{j=1}^k s_j\boldsymbol{a}_j)=(\sum_{i=1}^k s_i\boldsymbol{a}_i,\sum_{j=1}^k s_j\boldsymbol{a}_j)=|\sum_{j=1}^k s_j\boldsymbol{a}_j|^2\Leftrightarrow\sum_{j=1}^k s_j\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k)\ は一次従属.$$

逆はこれを逆にたどれば良い. (問)

[例 2 の一次独立性の証明] 内積 $(Jf_{ij}, Jf_{k\ell})$ は $k,\ell\neq i,j$ $(\Leftrightarrow \{k,\ell\}\cap\{i,j\}=\emptyset)$ のとき 0 で, 以下 $i<j$ として
$(Jf_{ii}, Jf_{ii}) = 4|\boldsymbol{x}_i|^2$, $(Jf_{ij}, Jf_{ij}) = |\boldsymbol{x}_j|^2+|\boldsymbol{x}_i|^2$, $(Jf_{ii}, Jf_{ij}) = 2(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j) = 2(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_i) = (Jf_{jj}, Jf_{ij})$,
$(Jf_{ij}, Jf_{i\ell}) = (\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_\ell)$ $(\ell\neq j,i)$, $(Jf_{ij}, Jf_{kj}) = (\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_k)$ $(k\neq i,j)$, (その他は) $(Jf_{ii}, Jf_{k\ell}) = (Jf_{ij}, Jf_{k\ell}) = 0$.
$X\in O(n)$ のとき $(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$ より, Jf_{ij} を $Jf_{11},\dots,Jf_{nn},Jf_{12},\dots$ の順に並べると Gram 行列は対角行列 $\mathrm{diag}\,(4,\dots,4,2,\dots,2)$ になるので $\det G\neq 0$, つまりこれらは一次独立になる.

注 表記を簡単にする為 関数の Jacobi 行列 (=gradient) を行列の形で表したが, 変数の並び順を指定することにより, 通常通り関数の Jacobi 行列を行ベクトルとして表示しても良い. $n=2$ のときの直交群 $O(2)$ を例にあげる:
変数を $x_{11},x_{21},x_{12},x_{22}$, 関数を f_{11},f_{22},f_{12} の順に並べる: $f_{11}=x_{11}^2+x_{21}^2-1$, $f_{22}=x_{12}^2+x_{22}^2-1$, $f_{12}=x_{11}x_{12}+x_{21}x_{22}$.

$$Jf_{11}=(2x_{11},2x_{21},0,0),\ Jf_{22}=(0,0,2x_{12},2x_{22}),\ Jf_{12}=(x_{12},x_{22},x_{11},x_{21}).$$

f の Jacobi 行列の行ベクトル $(=Jf_{ij})$ に対し, Gram 行列の成分=内積を求めると,

$$|Jf_{11}|^2=4(x_{11}^2+x_{21}^2)=4|\boldsymbol{x}_1|^2,\ |Jf_{22}|^2=4(x_{12}^2+x_{22}^2)=4|\boldsymbol{x}_2|^2,\ |Jf_{12}|^2=x_{12}^2+x_{22}^2+x_{11}^2+x_{21}^2=|\boldsymbol{x}_1|^2+|\boldsymbol{x}_2|^2,$$
$$(Jf_{11},Jf_{22})=0,\ (Jf_{11},Jf_{12})=2(x_{11}x_{12}+x_{21}x_{22})=2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2),\ (Jf_{22},Jf_{12})=2(x_{12}x_{11}+x_{22}x_{21})=2(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1).$$

f の Jacobi 行列と Gram 行列 G, 及び $X\in O(2)$ のとき $|\boldsymbol{x}_1|^2=|\boldsymbol{x}_2|^2=1$, $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=0$ より $O(2)$ 上で G は

$$Jf=\begin{bmatrix}2x_{11}&2x_{21}&0&0\\0&0&2x_{12}&2x_{22}\\x_{12}&x_{22}&x_{11}&x_{21}\end{bmatrix},\qquad G=\begin{bmatrix}4|\boldsymbol{x}_1|^2&0&2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\\0&4|\boldsymbol{x}_2|^2&2(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)\\2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)&2(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)&|\boldsymbol{x}_1|^2+|\boldsymbol{x}_2|^2\end{bmatrix},\quad G_{O(2)}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

よって $\det G_{O(2)}=4\cdot4\cdot2\neq0$ より Jf_{11},Jf_{22},Jf_{12} は一次独立. $\therefore\ \mathrm{rank}\,Jf=3$.

例 2 (unitary 群) $U(n):=\{A\in M(n;\mathbb{C})\mid A^*A=E\}\subset M(n;\mathbb{C})\cong M(n,2n;\mathbb{R})$. $A^*A=E\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)_{\mathbb{C}}=\delta_{ij}$ $(\forall\, i,j)$.
(ここで, $A^*={}^t\bar{A}$ は随伴行列, 複素内積 $(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)_{\mathbb{C}}$ は $\boldsymbol{a}_i^*\boldsymbol{a}_j=\sum_k\bar{a}_{ik}a_{kj}$ としておき, (,) は実内積とする. 良く用いられる ${}^t\boldsymbol{a}_i\overline{\boldsymbol{a}_j}$ とは複素共役の関係にあり以下の議論に本質的な影響はない.)
$f:M(n;\mathbb{C})\to M(n;\mathbb{C})$, $f(Z):=Z^*Z-E$ と置けば $U(n)=f^{-1}(O)$.
$Z=(\boldsymbol{z}_1\cdots\boldsymbol{z}_n)=X+\boldsymbol{i}Y$, $X=(\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_n)=(x_{ij})$, $Y=(\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_n)=(y_{ij})\in M(n;\mathbb{R})$ と置き,
$f=(f_{ij})$, $f_{ij}=(\boldsymbol{z}_i,\boldsymbol{z}_j)_{\mathbb{C}}-\delta_{ij}$ の実部を $g=(g_{ij})$, 虚部を $h=(h_{ij})$ とすれば
$(\boldsymbol{z}_i,\boldsymbol{z}_j)_{\mathbb{C}}=(\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{i}\boldsymbol{y}_i)^*(\boldsymbol{x}_j+\boldsymbol{i}\boldsymbol{y}_j)=({}^t\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{i}{}^t\boldsymbol{y}_i)(\boldsymbol{x}_j+\boldsymbol{i}\boldsymbol{y}_j)=({}^t\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j+{}^t\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_j)+\boldsymbol{i}({}^t\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_j-{}^t\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{x}_j)$ より

$$(\boldsymbol{z}_i,\boldsymbol{z}_j)_{\mathbb{C}}=((\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)+(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j))+\boldsymbol{i}((\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_j)-(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{x}_j)).$$

$f_{ji}=\bar{f}_{ij}$ より $g_{ji}=g_{ij}$, $h_{ji}=-h_{ij}$, $h_{ii}\equiv0$ なので

$$g_{ij}(X,Y):=(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)+(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j)-\delta_{ij}\ (i\leqq j)\quad h_{ij}(X,Y):=(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_j)-(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_i)\quad(i<j)$$

が異なる関数で, $\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2$ 個あり $\{Jg_{ij},Jh_{ij}\}$ が $U(n)$ 上一次独立であることは, $O(n)$ のときと同様に Gram 行列式 $\neq0$ を示せば分かるので, $2n^2-n^2=n^2$ より $U(n)$ が n^2 次元多様体であることが分かる.
関数を g_{ii},g_{ij},h_{ij} $(i\neq j)$ の組に分けて Jacobi 行列 (gradient) とそれらの内積=Gram 行列の成分を求めると:

$$Jg_{ii}=(\boldsymbol{0}\cdots\overset{i}{2\boldsymbol{x}_i}\cdots\boldsymbol{0}\,;\,\boldsymbol{0}\cdots\overset{n+i}{2\boldsymbol{y}_i}\cdots\boldsymbol{0}),\quad Jg_{ij}=(\boldsymbol{0}\cdots\overset{i}{\boldsymbol{x}_j}\cdots\overset{j}{\boldsymbol{x}_i}\cdots\boldsymbol{0}\,;\,\boldsymbol{0}\cdots\overset{n+i}{\boldsymbol{y}_j}\cdots\overset{n+j}{\boldsymbol{y}_i}\cdots\boldsymbol{0})\ (i<j)$$
$$Jh_{ij}=(\boldsymbol{0}\cdots\overset{i}{\boldsymbol{y}_j}\cdots\overset{j}{-\boldsymbol{y}_i}\cdots\boldsymbol{0}\,;\,\boldsymbol{0}\cdots\overset{n+i}{-\boldsymbol{x}_j}\cdots\overset{n+j}{\boldsymbol{x}_i}\cdots\boldsymbol{0})\ (i<j)$$
$$|Jg_{ii}|^2=4(|\boldsymbol{x}_i|^2+|\boldsymbol{y}_i|^2)=4|\boldsymbol{z}_i|^2_{\mathbb{C}},\qquad |Jg_{ij}|^2=|\boldsymbol{x}_j|^2+|\boldsymbol{x}_i|^2+|\boldsymbol{y}_j|^2+|\boldsymbol{y}_i|^2=|\boldsymbol{z}_j|^2_{\mathbb{C}}+|\boldsymbol{z}_i|^2_{\mathbb{C}},$$
$$|Jh_{ij}|^2=|\boldsymbol{y}_j|^2+|\boldsymbol{y}_i|^2+|\boldsymbol{x}_j|^2+|\boldsymbol{x}_i|^2=|\boldsymbol{z}_j|^2_{\mathbb{C}}+|\boldsymbol{z}_i|^2_{\mathbb{C}},$$

$\{k,\ell\}\cap\{i,j\}=\emptyset$ のときは $(Jg_{ij},Jg_{k\ell})=(Jg_{ij},Jh_{k\ell})=(Jh_{ij},Jh_{k\ell})=0$. $i<j$ として,

$$(Jg_{ii},Jg_{ij})=2((\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)+(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j))=2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{z}_i,\boldsymbol{z}_j)_{\mathbb{C}}=(Jg_{jj},Jg_{ij}),$$
$$(Jg_{ii},Jh_{ij})=2((\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_j)-(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{x}_j))=2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{z}_i,\boldsymbol{z}_j)_{\mathbb{C}}=(Jg_{jj},Jh_{ij}),$$
$$(Jg_{ij},Jg_{i\ell})=(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_\ell)+(\boldsymbol{y}_j,\boldsymbol{y}_\ell)=\mathrm{Re}(\boldsymbol{z}_j,\boldsymbol{z}_\ell)_{\mathbb{C}}\ (\ell\neq j,i),\ (Jg_{ij},Jg_{kj})=(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_k)+(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_k)=\mathrm{Re}(\boldsymbol{z}_i,\boldsymbol{z}_k)_{\mathbb{C}}\ (k\neq i,j),$$
$$(Jh_{ij},Jh_{i\ell})=(\boldsymbol{y}_j,\boldsymbol{y}_\ell)+(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_\ell)=\mathrm{Re}(\boldsymbol{z}_j,\boldsymbol{z}_\ell)_{\mathbb{C}}\ (\ell\neq j,i),\ (Jh_{ij},Jh_{kj})=(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_k)+(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_k)=\mathrm{Re}(\boldsymbol{z}_i,\boldsymbol{z}_k)_{\mathbb{C}}\ (k\neq i,j),$$
$$(Jg_{ij},Jh_{ij})=(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j)-(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)-(\boldsymbol{y}_j,\boldsymbol{x}_j)+(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{x}_i)=0,\ (Jg_{ij},Jh_{i\ell})=(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_\ell)-(\boldsymbol{y}_j,\boldsymbol{x}_\ell)=\mathrm{Im}(\boldsymbol{z}_j,\boldsymbol{z}_\ell)_{\mathbb{C}}\ (\ell\neq j,i)$$
$$(Jg_{ij},Jh_{kj})=-(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_k)+(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{x}_k)=-\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{z}_i,\boldsymbol{z}_k)_{\mathbb{C}}=\mathrm{Im}(\boldsymbol{z}_k,\boldsymbol{z}_i)_{\mathbb{C}}\ (k\neq i,j).$$

尚, $g_{ji}=g_{ij}$, $h_{ji}=-h_{ij}$ を用いれば (Jg_{ij},Jh_{ki}) 等は $(Jg_{ij},Jh_{ki})=-(Jg_{ij},Jh_{ik})$ 等より求まる.
$Z\in U(n)$ のとき $|\boldsymbol{x}_i|^2_{\mathbb{C}}=1$, $(\boldsymbol{z}_i,\boldsymbol{z}_j)=0$ $(i\neq j)$ より Gram 行列は対角成分以外は 0 になり, 対角成分は $|Jg_{ii}|^2=4$, $|Jg_{ij}|^2=2$, $|Jh_{ij}|^2=2$. よって Gram 行列式 $=4^n\cdot2^{n(n-1)}\neq0$ より Jg_{ii},Jg_{ij},Jh_{ij} は一次独立で $\mathrm{rank}\,Jf=n^2$.