多様体の例 (方程式の解空間として, 陰関数定理の系 (正則値の定理) により与えられる多様体)

以下, D は $\mathbb{R}^n$ の開集合, $f:D\to\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ は D 上の C^r 級写像 $(r=1,2,\dots,\infty)$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots.x_n)\in D\subset\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots.y_m)\in\mathbb{R}^m$ とし, f の Jacobi 行列 ($m\times n$ 行列で, 常に $\operatorname{rank} Jf\leqq\min\{m,n\}$) を次の様に表す:

$$Jf(\boldsymbol{x})=Jf_{\boldsymbol{x}}:=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right]=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}=:\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)},$$

Jacobi 行列が最大階数 (**full rank**) でない, 即ち $\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x})<\min\{m,n\}$ となる点 $\boldsymbol{x}\in U$ を f の **特異点** (singular point) といい, その像 $f(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^m$ を f の **特異値** (singular value) という.
$\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x})<m$ となる点を**臨界点** (critical point) といい, 像 $f(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^m$ を f の **臨界値** (critical value) という.
特異点又は臨界点でない点 $\boldsymbol{x}\in D$ を f の**正則点** (regular point) というが, ここでは Jacobi 行列が最大階数 ($\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x})=\min\{m,n\}$) となる点 $\boldsymbol{x}$ を**正則点**という. また, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$ が f の **正則値** (regular value) とは, 特異値でない点のこととする. 即ち, $\boldsymbol{x}\in f^{-1}(\boldsymbol{y})$ が全て正則点, または $f^{-1}(\boldsymbol{y})=\emptyset$ のときとする.

陰関数定理 (I) $n>m$, $n=m+k$ とし, $\boldsymbol{x}_0$ を C^r 級写像 $f:D\to\mathbb{R}^m$ の正則点とする. ($\therefore$ $\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x}_0)=m\Leftrightarrow Jf(\boldsymbol{x}_0)$ 中の m 個の列ベクトルは一次独立.) このとき, (変数を並べ替え,) $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}^1=(x_1,\dots,x_k)$, $\boldsymbol{x}^2=(x_{k+1},\dots,x_n)$ とすれば, $\boldsymbol{x}_0\in D$ の開近傍 U, $(\boldsymbol{x}_0^1,f(\boldsymbol{x}_0))\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m$, の開近傍 $W\times V$, ($W\subset\mathbb{R}^k$, $V\subset\mathbb{R}^m$), 及び C^r 級微分同相 $\tilde{g}:W\times V\overset{\cong}{\to}U$ が存在して $f(\tilde{g}(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{y}$ をみたす.
特に $M:=f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$, $g(\boldsymbol{x}^1):=\tilde{g}(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_0)$, $g:W\to U$ とすれば g は W と $M\cap U$ の間の C^r 級微分同相を与える.

この系として,

正則値の定理 $n>m$, $k:=n-m$ とし, $\boldsymbol{y}_0$ を C^r 級写像 $f:D\to\mathbb{R}^m$ の正則値, $M:=f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)\neq\emptyset$ とする. ($\therefore$ $\forall\boldsymbol{x}\in M$ ($\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x})=m$).) この時 M は k 次元 C^r 級多様体になる. ($x\in M$ の周りの C^r 級局所座標系 φ_x は Jacobi 行列 Jf の $\{1,\dots,n\}-\{i_1,\dots,i_k\}$ 列が一次独立になる様な $\{i_1,\dots,i_k\}$ 成分への射影の制限写像により与えられる.) (問: この定理を示せ.)

関数の場合 C^r 級関数 $f:D\to\mathbb{R}$, $m=1$, $n=k+1$ とするとき, $\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x})<1\Leftrightarrow Jf(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ なので,

$$Jf(\boldsymbol{x}_0)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]_{\boldsymbol{x}_0}(=:\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0))=\boldsymbol{0}$$

となる点が特異点 (=臨界点), $f(\boldsymbol{x}_0)$ が特異値になる. それ以外の値は全て正則値だが $y\in f(D)$ のみを考える.

例 6 p 次多項式 $f(\boldsymbol{x})=(x_1)^p+\cdots+(x_n)^p$ $(p\geqq 2)$ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ について

$$Jf(\boldsymbol{x})=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]_{\boldsymbol{x}}=(p(x_1)^{p-1},\dots,p(x_n)^{p-1})$$

より $Jf(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. $f(\boldsymbol{0})=0$ より $\boldsymbol{0}$ 以外は正則値. 特に $d>0$ ならば $M=f^{-1}(d)\neq\emptyset$ より M は $(n-1)$ 次元 (C^∞ 級) 多様体になる. 特に $p=2$ のとき, $(n-1)$ 次元球面 $(x_1)^2+\cdots+(x_n)^2=d$ は多様体.
また, $D:=\mathbb{R}^n-\{\boldsymbol{0}\}$ とし, $f'=f|_D:D\to\mathbb{R}$ とすれば f' に特異点はなく, $f'^{-1}(\boldsymbol{0})$ $(=(f^{-1}(\boldsymbol{0})-\{\boldsymbol{0}\})$ も $(n-1)$ 次元 (C^∞ 級) 多様体になる.

方程式の解空間 C^r 級関数 $f:D\to\mathbb{R}$ に対し 方程式 $f(\boldsymbol{x})=d$ で定まる図形 $M=f^{-1}(d)$ は d が正則値ならば C^r 級多様体になるが, C^r 級関数 $g,h:D\to\mathbb{R}$ に対し 方程式 $g(\boldsymbol{x})=h(\boldsymbol{x})$ で定まる図形 $M=\{\boldsymbol{x}\in D\mid g(\boldsymbol{x})=h(\boldsymbol{x})\}$ は $f(\boldsymbol{x}):=g(\boldsymbol{x})-h(\boldsymbol{x})$ とおけば $M=f^{-1}(0)$ なので, 0 が f の正則値ならば M は C^r 級多様体になる.
C^r 級関数 $g_i,h_i:D\to\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,m)$ に対し連立方程式 $g_i(\boldsymbol{x})=h_i(\boldsymbol{x})$ $(i=1,\dots,m)$ で定まる図形
$M=\{x\in D\mid g_i(\boldsymbol{x})=h_i(\boldsymbol{x})\ (i=1,\dots,m)\}$ は $f_i:=g_i-h_i$, $f:=(f_1,\dots,f_m):D\to\mathbb{R}^m$ とおけば
$M=f^{-1}(\boldsymbol{0})$ なので, $\boldsymbol{0}$ が正則値ならば M は C^r 級多様体になる. $\boldsymbol{0}$ が正則値でない場合も, M から特異点を除いておけば C^r 級多様体になる.

行列の作る多様体: $M(n;\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$ $(M(n;\mathbb{C})\cong\mathbb{R}^{2n^2})$ の部分空間で多様体になっているものの例. (プリント参照)