補足

逆関数定理とその周辺　以下, D は $\mathbb{R}^n$ の開集合, $f:D\to\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ は D 上の C^r 級写像 $(r=1,2,\ldots,\infty)$ とする. f の Jacobi 行列 $Jf(\boldsymbol{x})$ は $m\times n$ 行列で, その階数は常に $\operatorname{rank} Jf \leqq \min\{m,n\}$ である.
Jacobi 行列が最大階数 (**full rank**, $\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x})=\min\{m,n\}$) となる点 $\boldsymbol{x}\in U$ を f の**正則点** (regular point) といい, そうでない点 ($\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x})<\min\{m,n\}$ となる点) $\boldsymbol{x}$ を f の**特異点** (singular point) という. また, $\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x})<m$ となる点を**臨界点** (critical point) という.
特異点の像 $f(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^m$ を **特異値** (singular value) といい, そうでない点 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$ を**正則値** (regular value) という. これは $\boldsymbol{x}\in f^{-1}(\boldsymbol{y})$ が全て正則点であるか又は $f^{-1}(\boldsymbol{y})=\emptyset$ のとき. 臨界点の像を**臨界値** (critical value) という.
正則点 $\boldsymbol{x}_0\in D$ と像 $\boldsymbol{y}_0:=f(\boldsymbol{x}_0)$ の近傍に関し, $n=m$ のときの逆関数定理, $n>m$ のときの陰関数定理, $n<m$ のときの結果について述べる: ($n\neq m$ のときは逆関数定理から得られる.)
以下, 「近傍」は**開近傍**のこととし, 写像や変数は 横書きにするが, 列ベクトルと解釈する. ($\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\ldots,x_n)$ 等.)

逆関数定理 (逆写像定理) ($m=n$, $Jf(\boldsymbol{x}_0)$ が正則行列のとき) 正則点 $\boldsymbol{x}_0$ の D 内の近傍 U と $\boldsymbol{y}_0$ の近傍 V が存在して $f|_U:U\to V$ は C^r 級**微分同相** (C^r-diffeomorphic), 即ち $f|_U$ は同相で逆写像 $g=(f|_U)^{-1}$ も C^r 級である.

$m\neq n$ のとき $k:=|n-m|$ とおく.

• $n>m$ のとき (陰関数定理) $\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x}_0)=m$ なので m 個の行ベクトルは一次独立. そこで k 個の行ベクトルの組 A ($k\times n$ 行列) を付け加えて $\begin{pmatrix} A \\ Jf(\boldsymbol{x}_0)\end{pmatrix}$ が正則になる様にする: $Jf(\boldsymbol{x}_0)$ の列ベクトル中の m 個は一次独立. そこで $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ を並べ替えて $f_{x_{k+1}}(\boldsymbol{x}_0),\ldots,f_{x_m}(\boldsymbol{x}_0)$ が一次独立となる様にする. 即ち, $\boldsymbol{x}^1=(x_1,\ldots,x_k)$, $\boldsymbol{x}^2=(x_{k+1},\ldots,x_n)$, $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2)\in D\subset\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^n$ とおくとき m 次行列 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}^2}(\boldsymbol{x}_0)$ は正則とする. このときの A は $A=(E_k\, O_{km})$ として, $\boldsymbol{x}$ を並べ替えたときは元の順に戻せばよい. (但し E_k は単位行列.)
このとき $\tilde f:D\to\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^n$ を $\tilde f(\boldsymbol{x}):=(A\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))$ で定めれば $J\tilde f(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix} A \\ Jf(\boldsymbol{x}_0)\end{pmatrix}$ となり, $J\tilde f(\boldsymbol{x}_0)$ は正則より逆関数定理が適用できて,
陰関数定理 (I)　正則点 $\boldsymbol{x}_0$ の D 内の近傍 $\tilde U$ と $(A\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^n$ の近傍 $\tilde V$, ($\tilde f|_U$ の逆写像となる) C^r 級微分同相 $\tilde g:\tilde V\to\tilde U$ が存在して, $f(\tilde g(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{y}$ $((\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y})\in\tilde V)$, $\tilde g(A\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{x}_0$.
特に $\tilde g$ は, $(A\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in W\times V\subset\tilde V$ なる近傍 $W\times V$ と $\boldsymbol{x}_0$ の近傍 $U:=\tilde g(W\times V)$ の間の微分同相 $\tilde g|_{W\times V}$ を与える.
· 特に (並べ替えなくても) m 次行列 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}^2}(\boldsymbol{x}_0)$ が正則のとき, $A=(E_k\, O_{km})$, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^1$ より微分同相 $\tilde g:W\times V\to U$ (上の $\tilde g|_{W\times V}$) が存在して $f(\tilde g(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{y}$. また $\tilde g(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}^1,g^1(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}))$, $g^1:W\times V\to\mathbb{R}^m$ と表せる. このとき $g(\boldsymbol{x}^1):=g^1(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_0)$ とおけば $f(\boldsymbol{x}^1,g(\boldsymbol{x}^1))=f(\boldsymbol{x}^1,g^1(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_0))=f(\tilde g(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_0))=\boldsymbol{y}_0$ より
陰関数定理 (II)　$n>m$ のとき, $f:D\to\mathbb{R}^m$ の正則点 $\boldsymbol{x}_0=(\boldsymbol{x}_0^1,\boldsymbol{x}_0^2)$ において $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}^2}(\boldsymbol{x}_0)$ が正則ならば $\boldsymbol{x}_0^1\in\mathbb{R}^k$ の近傍 W が存在し, C^r 級写像 $g:W\to\mathbb{R}^m$ が 一意的に存在して $f(\boldsymbol{x}^1,g(\boldsymbol{x}^1))\equiv\boldsymbol{y}_0:=f(\boldsymbol{x}_0)$, $g(\boldsymbol{x}_0^1)=\boldsymbol{x}_0^2$ をみたす.
即ち, $S:=f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ とするとき $S\cap U$ は $\boldsymbol{x}^2=g(\boldsymbol{x}^1)$ のグラフ $\{(\boldsymbol{x}^1,g(\boldsymbol{x}^1))\in D\,|\,\boldsymbol{x}^1\in W\}$ として表される.
• これらより, $\mathbb{R}^n$ の部分空間 S の正則点 $\boldsymbol{x}_0\in S$ は, $\mathbb{R}^k$ の開集合 W と微分同相である相対位相での近傍 $S\cap U$ をもつ. 微分同相 $g:W\to S\cap U$ の逆写像は, 射影 $\pi_1:\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$, $\pi_1(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2):=\boldsymbol{x}^1$ の制限写像 (C^∞ 級).
(ここで, $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S からの写像 $f:S\to\mathbb{R}^k$ が C^r 級 $\leftrightarrow f$ は S のある近傍からの C^r 級写像に拡張される.)

この応用として次の正則値の定理がある.
正則値の定理　C^r 級写像 $f:D\to\mathbb{R}^m$ $(D\subset\mathbb{R}^n, k:=n-m>0)$ において, $\boldsymbol{y}_0\in\mathbb{R}^m$ が正則値ならば 逆像 $S:=f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ の各点は $\mathbb{R}^k$ の開集合と微分同相な近傍をもつ. 即ち S は C^r 級多様体である.

• $n<m$ のとき ($m=n+k$. $\tilde f:D\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ を作る) 正則点 $\boldsymbol{x}_0$ で $\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x}_0)=n$ なので, $Jf(\boldsymbol{x}_0)$ の n 個の列ベクトルは一次独立. 従って k 個の列ベクトル $A=(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k)$ を追加して $(Jf(\boldsymbol{x}_0),A)$ が正則になる様にできる. (例えば, 基本ベクトルの内 $Jf(\boldsymbol{x}_0)$ と一次独立なものを選べばよい.) $\tilde f:D\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ を $\tilde f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}):=f(\boldsymbol{x})+A\boldsymbol{z}$ と定めれば $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{0})\in D\times\mathbb{R}^k$ で $J\tilde f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{0})=(Jf(\boldsymbol{x}_0),A)$ より正則. ∴ 逆関数定理が適用できて,

(仮称) **はめ込み定理**　$n<m$, $k=m-n$ のとき $f:D\to\mathbb{R}^m$ の正則点 $\boldsymbol{x}_0$ に対し, $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{0})\in D\times\mathbb{R}^k\subset\mathbb{R}^m$ の近傍 $\tilde U$ と $\boldsymbol{y}_0:=f(\boldsymbol{x}_0)\in\mathbb{R}^m$ の近傍 $\tilde V$, 及び C^r 級微分同相 $g:\tilde V\to\tilde U$ が存在して, $\boldsymbol{x}\in f^{-1}(\tilde V)\,(\subset D)$ に対し, $g(f(\boldsymbol{x}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})$ 特に, $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{0})\in U\times W\subset D\times\mathbb{R}^k$ なる近傍 $U\times W$ と $\boldsymbol{y}_0$ の近傍 $V:=\tilde f(U\times W):=g^{-1}(U\times W)$ の間に微分同相 $g|_V:V\to U\times W$ が存在して, $g(f(\boldsymbol{x}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})$ $(\boldsymbol{x}\in W)$.

常微分方程式の基礎定理　一つの変数 (独立変数) といくつかの一変数関数（従属変数) 及びその有限回の導関数を含む (単独または連立) 方程式を**常微分方程式** (ordinary differential equation (**O.D.E**)) という. (複数の変数と多変数関数およびその有限回の偏導関数を含む方程式は**偏微分方程式** (partial differential equation (**P.D.E**)) といい, これらを総称して**微分方程式**という.) (偏) 導関数の最大階数を微分方程式の階数という. 微分方程式をみたす関数 (の組) を**解**または**未知関数**という.　以下, t を独立変数, $' = \frac{d}{dt}$, $x^{(i)} = \frac{d^i x}{dt^i}$ とする.
未知関数が 1 つの n 階常微分方程式の一般形は既知の関数 $F(t, x_0, \ldots, x_n)$ に対し, $F(t, x, x^{(1)} \ldots, x^{(n)}) = 0$ で与えられるが, $F(t, x_0, \ldots, x_n) = 0$ を x_n について解いて $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)} \ldots, x^{(n-1)})$ の形 (**正規形**) に出来るとする. 正規形の n 階方程式は次の様に 1 階連立方程式に帰着出来る (1 階化):

$y_0 := x,\ y_1 =: x^{(1)}, \ldots, y_{n-1} := x^{(n-1)}$　とおけば　$y_i' = y_{i+1}\ (i = 0, \ldots, n-2)$,　$y_{n-1}' = f(t, y_0, \ldots, y_{n-1})$

未知関数, 方程式が複数のときはそれぞれを 1 階化すれば, 次の 1 階連立常微分方程式の正規形に帰着される:
$f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1 \ldots, n)$ を既知の $(n{+}1)$ 変数関数, $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ を未知関数とするとき

$$u_i' = f_i(t, u_1, \ldots, u_n), \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \big(\ x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{と表される}\big)$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ として ベクトル記法を用いれば

$$(1) \qquad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(t, \boldsymbol{x}) \qquad \text{あるいは} \quad \boldsymbol{x}' = f(t, \boldsymbol{x})$$

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}(t)$ が (1) の解とは $\boldsymbol{u}'(t) = f(t, \boldsymbol{u}(t))$ をみたすとき. 以下 この解 $\boldsymbol{u}(t)$ を $\boldsymbol{x}(t)$ と表す. 写像 f の定義域を D $(\subset \mathbb{R}{\times}\mathbb{R}^n)$ とするとき, **初期値** $(\tau, \boldsymbol{a}) \in D$ に対し**初期条件** $\boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{a}$ をみたす (1) の解 $\boldsymbol{x}(t)$ を考える.
· 高階を含む常微分方程式の解の存在と一意性は次の定理に帰着される.

定理 1 (常微分方程式の解の存在と一意性)　$r \geqq 1$ とし, D を $\mathbb{R}{\times}\mathbb{R}^n$ の領域, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級写像とするとき,

初期値 $(\tau, \boldsymbol{a}) \in D$ に対し　$\boldsymbol{x}'(t) = f(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{a}$

をみたす, ある開区間 $I = I_{(\tau, \boldsymbol{a})}$ $(\ni \tau)$ 上で定義された解 $\boldsymbol{x}(t)$ が一意的に存在して C^{r+1} 級である.
· 解は初期値に依存するので $(\tau, \boldsymbol{a}) \in D$ に対する解は $\boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{x}(\tau; \tau, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a})$ と表される. このとき

定理 1' (初期値への依存性) 解 $\boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{a})$ は $(\tau, \tau, \boldsymbol{a})$ のある開近傍上一意的に存在し $\tau, \boldsymbol{a}$ に関し C^r 級である.
· パラメーター $\boldsymbol{s}{=}(s_1, \ldots, s_k)$ を含む常微分方程式 $\boldsymbol{x}' = f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$, $\boldsymbol{x}(\tau){=}\boldsymbol{a}$ を考える. $\boldsymbol{s}$ を固定すれば上の定理に帰着するので 解は $\boldsymbol{s}$ と $(\tau, \boldsymbol{a})$ に依存するが, 解の一意性が成り立つとき, この解は $\boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{s})$ と表される.

定理 2(パラメーターに対する依存性)　$r \geqq 1$, D を $\mathbb{R}{\times}\mathbb{R}^n{\times}\mathbb{R}^k$ の領域, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級写像とするとき,

$$\boldsymbol{x}' = f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}), \quad \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{a} \quad ((\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{s}) \in D)$$

をみたす解 $\boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{s})$ $(t \in I_{(\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{s})})$ が一意的に存在して $\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{s}$ に関し C^r 級である. (t については C^{r+1} 級.)
さらに, $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{s}$ に依存し, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{s})$ が C^r 級ならば初期値 $\boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{s})$ に対する解 $\boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{s})$ も C^r 級である.
• 写像 f が C^∞ 級ならば, (一般の) 常微分方程式の解も一意的に存在し, 初期値, パラメーターを含め C^∞ 級.

線型常微分方程式: 次の形の方程式を**線形**方程式という. ($a_{ij}(t), b_i(t)$ は開区間 I 上の関数として)

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + b_i(t)\ (i{=}1, \ldots, n) \quad \therefore\ \boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)\ \ (A(t) = (a_{ij}(t)),\ \boldsymbol{b}(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t))\ )$$

$f(t, \boldsymbol{x}) = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ は $\boldsymbol{x}$ に関して一次なので $f : I{\times}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(D = I{\times}\mathbb{R}^n)$ ($\boldsymbol{x}$ について C^∞ 級) と考える.

定理 3(線型常微分方程式)　開区間 I 上で定義された C^r 級 $(r{\geqq}0)$ 関数 $a_{ij}(t), b_i(t)$ $(i, j{=}1, \ldots, n)$ に対し,

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t),\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{a} \quad ((\tau, \boldsymbol{a}) \in I{\times}\mathbb{R}^n) \quad (A(t) = (a_{ij}(t)),\ \boldsymbol{b}(t) = (b_i(t))$$

の解 $\boldsymbol{x}(t)$ が I 全体の上で一意的に存在して C^{r+1} 級である. ($A(t), \boldsymbol{b}(t)$ が C^∞ 級なら解も C^∞ 級.)
($a_{ij}(t), b_i(t)$ の値域を $\mathbb{C}$ $(f : I{\times}\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ にしても実部と虚部に分ければ同様に成り立つ.)

注 1　n 階方程式 $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)} \ldots, x^{(n-1)})$ の初期値は $x(\tau){=}a_1, x^{(1)}(\tau){=}a_2, \ldots, x^{(n-1)}(\tau){=}a_n$ で与えられ (例えば $x^{(n)} = 0$ の解は $x(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k (t{-}\tau)^{k-1}/(k{-}1)!$), 定理 1 より f が C^r 級のとき解は C^{r+n} 級になる.
注 2　線型常微分方程式の解はさらに詳しく調べられている. 例えば, 同次 (斉次)($\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{0}$) のとき, 解全体は n 次元ベクトル空間になる. 特に A が定数行列なら $\boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{a}) = e^{(t-\tau)A}\boldsymbol{a}$ $(e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} (tA)^n/n!)$, 等.
注 3 解の存在と一意性もより詳しく分っている:　f が連続 (C^0) のとき, C^1 級の解が存在するが一意的とは限らない, f が連続かつ $\boldsymbol{x}$ に関して C^r 級 $(r{\geqq}1)$ であれば解は一意的に存在し $\boldsymbol{a}(, \boldsymbol{s})$ については C^r 級, 等.
注 4 区間 I_0, I_1 $(\tau \in I_0{\subset}I_1)$ 上でそれぞれ解 $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)$ $(\boldsymbol{x}(\tau){=}\boldsymbol{a}{=}\boldsymbol{y}(\tau))$ が得られたとすると, 一意性のもとで, $t \in I_0$ で $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$ となり, $\boldsymbol{y}(t)$ により解 $\boldsymbol{x}(t)$ は I_1 上に延長されたことになる (解の延長). 解が延長できる区間には極大なものが存在し, それは開区間となる. その極大開区間を $I_{(\tau, \boldsymbol{a})}$ とすれば, $I_{(\tau, \boldsymbol{a})}$ は一意的に定まり, $I_{(\tau, \boldsymbol{a})}$ 上で解 $\boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{a})$ のグラフ $\{(t, \boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{a})) \in \mathbb{R}{\times}\mathbb{R}^n \,|\, t \in I_{(\tau, \boldsymbol{a})}\}$ は領域 D の境界まで達する.