多様体の座標近傍系の例 (球面)

以下, 一般に, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ に対し norm を $|x|\,(:=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})$ と表す.

例 n **次元球面** $S^n:=\{a=(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\mid |a|^2\,(=a_1^2+\cdots+a_n^2+a_{n+1}^2)=1\}$

(1) (立体射影 (stereographic projection) $p_+:=(0,\dots,0,1)\,(=\boldsymbol{e}_{n+1})$ (北極), $p_-:=(0,\dots,0,-1)\,(=-\boldsymbol{e}_{n+1})$ (南極) とおき, $\mathbb{R}^n\times\{0\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ を $\mathbb{R}^n$ とみなす. ($\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^3$ 内の xy 平面とみなされる.)

$U_+:=S^n-\{p_+\}:=\{(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})\in S^n\mid a_{n+1}<1\}$ (S^n の開集合) とし, 点 $a\in U_+$ を, p_+ と a を結ぶ直線と $\mathbb{R}^n$ との交点 x に対応させる写像 $\varphi_+:U_+\to\mathbb{R}^n$ を 点 p_+ を中心とする **立体射影** という. (図)

$\boldsymbol{a}:=(a_1,\dots,a_n)$, $a:=(\boldsymbol{a},a_{n+1})$ と置くと $(|\boldsymbol{a}|^2+a_{n+1}^2=1)$,

$$x=\varphi_+(a):=\frac{\boldsymbol{a}}{1-a_{n+1}}=\Big(\frac{a_1}{1-a_{n+1}},\dots,\frac{a_n}{1-a_{n+1}}\Big),\tag{1.1}$$

逆写像 $a=\varphi_+^{-1}(x)$ は, $|x|^2(1-a_{n+1})^2=|\boldsymbol{a}|^2=1-a_{n+1}^2$ より a_{n+1} が求まり, $\boldsymbol{a}=(1-a_{n+1})x$ に代入すれば,

$$a=(\boldsymbol{a},a_{n+1})=\varphi_+^{-1}(x)=\Big(\frac{2x}{|x|^2+1},\frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}\Big)=\Big(\frac{2x_1}{|x|^2+1},\dots,\frac{2x_n}{|x|^2+1},\frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}\Big)\tag{1.2}$$

南極からの立体射影 $\varphi_-:U_-\to\mathbb{R}^n$ $(U_-:=S^n-\{p_-\}:=\{(\boldsymbol{a},a_{n+1})\in S^n\mid a_{n+1}>-1\})$ も同様に,

$$y=\varphi_-(\boldsymbol{a},a_{n+1}):=\frac{\boldsymbol{a}}{1+a_{n+1}}=\Big(\frac{a_1}{1+a_{n+1}},\dots,\frac{a_n}{1+a_{n+1}}\Big)\tag{1.3}$$

$$a=(\boldsymbol{a},a_{n+1})=\varphi_-^{-1}(y)=\Big(\frac{2y}{|y|^2+1},\frac{1-|y|^2}{|y|^2+1}\Big)=\Big(\frac{2y_1}{|y|^2+1},\dots,\frac{2y_n}{|y|^2+1},\frac{1-|y|^2}{|y|^2+1}\Big)\tag{1.4}$$

これらは有理関数なので, 分母 $\neq 0$ より連続で, 実際に $\varphi_\pm^{-1}\circ\varphi_\pm=1_{U_\pm}$, $\varphi_\pm\circ\varphi_\pm^{-1}=1_{\mathbb{R}^n}$ を確かめれば同相になる.

座標変換 $y=\varphi_-(a)=\varphi_-(\varphi_+^{-1}(x))$ は, $U_+\cap U_-=S^n-\{p_+,p_-\}$ $(a_{n+1}\neq\pm1)$, $x\neq0$, $y\neq0$ に注意して (1.3) に (1.2) を代入すれば $1+a_{n+1}=2|x|^2/(|x|^2+1)$ より次式を得, 同様に $x=\varphi_+(\varphi_-^{-1}(y))$ も得られて,

$$y=\varphi_-(\varphi_+^{-1}(x))=\frac{x}{|x|^2}=\Big(\frac{x_1}{|x|^2},\dots,\frac{x_n}{|x|^2}\Big),\tag{1.5}$$

$$x=\varphi_+(\varphi_-^{-1}(y))=\frac{y}{|y|^2}=\Big(\frac{y_1}{|y|^2},\dots,\frac{y_n}{|y|^2}\Big)\tag{1.5$'$}$$

これらは有理関数で, 分母 $\neq 0$ より C^∞ 級 (C^ω 級) であり,

$$\mathcal{S}:=\{(U_+,\varphi_+),(U_-,\varphi_-)\}$$

は S^n の C^∞ 級 (C^ω 級) 座標近傍系になるので $(S^n,\mathcal{S})$ は C^∞ 級 (C^ω 級) 多様体である. さらに, S^n は compact で, $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間なので第二可算公理をみたす.

(2) (正射影) $B^n:=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x|^2<1\}$ を n 次元単位開球体, S^n の開集合 $U_i^\pm$, $i=1,2,\dots,n+1$ を,

$$U_i^+:=\{a=(a_1,\dots,a_i,\dots,a_{n+1})\in S^n\mid a_i>0\},\qquad U_i^-:=\{a=(a_1,\dots,a_i,\dots,a_{n+1})\in S^n\mid a_i<0\},$$

$\psi_{i\pm}:U_i^\pm\to B^n$ を射影

$$x=\psi_{i\pm}(a):=(a_1,\dots,\check{a}_i,\dots,a_{n+1}):=(a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_{n+1})\quad(a_i\ \text{をはぶく})\tag{1.6}$$

とする. (n=2 のとき $\psi_{3\pm}$ は xy 平面への, $\psi_{1\pm}$ は yz 平面への, $\psi_{2\pm}$ は xz 平面への射影.) 逆写像 $\psi_{i\pm}^{-1}$ は,

$$a=\psi_{i+}^{-1}(x)=(x_1,\dots,x_{i-1},\overset{i}{\sqrt{1-|x|^2}},x_i\dots,x_n)\Leftrightarrow a_j=x_j\ (j<i),\ a_i=\sqrt{1-|x|^2},\ a_j=x_{j-1}\ (j>i),\tag{1.7}$$

$$a=\psi_{i-}^{-1}(x)=(x_1,\dots,x_{i-1},\overset{i}{-\sqrt{1-|x|^2}},x_i\dots,x_n)\Leftrightarrow a_j=x_j\ (j<i),\ a_i=-\sqrt{1-|x|^2},\ a_j=x_{j-1}\ (j>i),\tag{1.8}$$

(n=2 のとき, $\psi_{3+}^{-1}(x_1,x_2)=(x_1,x_2,\sqrt{1-|x|^2})$, $\psi_{2-}^{-1}(x_1,x_2)=(x_1,-\sqrt{1-|x|^2},x_2)$ $(|x|^2=x_1^2+x_2^2)$ 等.)

$U_i^+\cap U_i^-=\emptyset$ だが それ以外の共通部分 $U_i^\pm\cap U_j^\pm=\{a\in S^n\mid a_i\gtrless0,\ a_j\gtrless0\}$ $(i\neq j)$ は空でなく, 座標変換は

$$y=\psi_{i\pm}(\psi_{j\pm}^{-1}(x))=\begin{cases}(x_1,\dots,\overset{i}{\check{x}_i},\dots,x_{j-1},\overset{j}{\pm\sqrt{1-|x|^2}},x_j\dots,x_n) & i<j\\ (x_1,\dots,x_{j-1},\overset{j}{\pm\sqrt{1-|x|^2}},x_j\dots,\overset{i}{\check{x}_{i-1}},\dots,x_n) & i>j\end{cases}\tag{1.9}$$

($\pm\sqrt{1-|x|^2}$ の $\pm$ は $\psi_{j\pm}^{-1}$ の $\pm$ に一致.) $1-|x|^2>0$ より $\pm\sqrt{1-|x|^2}$ は C^∞ 級なので,

$$\mathcal{T}:=\{(U_i^\pm,\psi_{i\pm})\}_{i=1}^{n+1}$$

は C^∞ 級座標近傍系になり, $(S^n,\mathcal{T})$ は C^∞ 級多様体になる.