幾何学第一　(多様体論 (manifold theory))

$\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面の一般化として **多様体** (manifold) を定義する. (滑らかな曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ とは, $\mathbb{R}^3$ の部分空間で, 座標平面の開集合によるパラメーター表示をもつ, 即ち, $\mathbb{R}^2$ の開集合から S の各点の開近傍への微分同相があるもののことだった.)　これを一般化して, まず位相空間としての多様体を定義する.

以下 $\mathbb{R}^m$ は通常の位相をもつ Euclid 空間 (m 次元**座標空間**) とし, $x\ (=\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$ 等の座標を $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(x_i \in \mathbb{R})$ 等で表す. これを x の**標準座標**という.　また, $\mathbb{R}^m$ の部分集合は相対位相をもつ部分空間とする.

定義 (局所座標系)　位相空間 M の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ のある開集合 U' への同相写像

$$\varphi : U \xrightarrow{\approx} U' \quad (\subset \mathbb{R}^m), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m), \quad \varphi_i : U \to \mathbb{R}$$

があるとき, 対 (U, φ) (または U) を m 次元**座標近傍** (coordinate neighbourhood) といい, φ を U 上の**局所座標系** (local coordinate system) または (local) **chart**(ここでは地図の意) という. また, M の点 $p \in U \subset M$ について,

$$\varphi(p) = \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in U' \subset \mathbb{R}^m \quad ((x_1, x_2, \ldots, x_m) \text{ を } ((x_1(p), x_2(p), \ldots, x_m(p)) \text{ とも表す})$$

を点 p の (U, φ) に関する**局所座標** (local coordinate) という. (この逆写像 φ^{-1} がパラメーター表示) (図) また, φ は成分関数 $\varphi_i : U \to \mathbb{R}$ $(x_i = \varphi_i(p))$ の組なので φ は**座標関数系**ともいわれ, 各 φ_i は**座標関数**といわれる.

注　「座標近傍」と「局所座標系」のどちらも (U, φ) を念頭においているが開集合 U について述べるときは「座標近傍」といい, 主として写像 φ を考えるときは「局所座標系」という.　V が U 内の開集合 $(V \subset U)$ のとき $\varphi|_V : V \xrightarrow{\approx} \varphi(V) =: V'$ とすれば $(V, \varphi|_V)$ も座標近傍で, $\Phi : U' \xrightarrow{\approx} U'' \subset \mathbb{R}^m$ が同相写像なら $(U, \Phi \circ \varphi : U \to U'')$ も局所座標系になる.　以下, しばしば制限写像の記号 $|_V$ を略して単に φ と書く.

定義 (位相多様体)　位相空間 M が m 次元**位相多様体** (n-dimensional topological manifold) 又は **C^0-多様体** (C^0-manifold) とは, 次の (1),(2) をみたすときをいう:

(1) M の各点 $p \in M$ について p を**含む** (又は, p の**周りの**) 座標近傍 (U, φ) が存在する (U は p の開近傍),

(2) M は Hausdorff 空間である. (通常, 多様体は Hausdorff 空間であると仮定される.)

条件 (1) は次と同じ:　M には「座標近傍からなる開被覆」

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \quad M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha, \quad \varphi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\approx} U'_\alpha \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$$

が存在する. この $\mathcal{S} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を**座標近傍系** または **atlas** (ここでは地図帳の意) という.

注 m 次元多様体 M はその次元を明示するときは M^m と表わされる.

注 M の各点 $p \in M$ を含む座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対し特に V' $(\subset U'_\alpha = \varphi(U_\alpha),\ \varphi(p) \in V')$ が $\mathbb{R}^m$ 内の開球体や (m 次元) 開立方体にとれ, 更にこれらは $\mathbb{R}^m$ と同相なので, p の周りの座標近傍として $(V,\ \psi : V \to \mathbb{R}^m)$ となるものが取れる. この意味で, 位相多様体は「局所的に Euclid 空間」(と同相な空間) (locally euclidean) とも言われる.

例 1　Euclid 空間 $M = \mathbb{R}^n$ は M を位相空間と考え, $\mathbb{R}^n$ を座標空間と考えるとき, 座標近傍 $(M, 1_{\mathbb{R}^n} : M \to \mathbb{R}^n)$ (ただ一つの座標近傍からなる座標近傍系) をもつので n 次元位相多様体である. これを $\mathbb{R}^n$ の**標準座標系** という. (この様に 1 つの座標近傍が全体を覆うとき (局所座標系という代わりに) 大域座標系 (global chart) ということがある.) 同様に $\mathbb{R}^n$ の開集合 U も $(U, 1_U)$ により位相多様体になる.

例 2　滑らかな曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ が パラメーター表示: $p_\alpha : U'_\alpha \to U_\alpha \subset S \subset \mathbb{R}^3$, (U'_α は座標平面 $\mathbb{R}^2$ の開集合, p_α は S の開集合 U_α への微分同相) の組 $\{(U'_\alpha, p_\alpha)\}_\alpha$ によって表わされているとき, S は p_α の逆写像 $p_\alpha^{-1} =: \varphi_\alpha$ を局所座標系とする多様体になる. 座標近傍系は $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$.

例 3 (開部分多様体)　位相多様体 M の開部分空間 N は, $\{(U_\alpha \cap N, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N})\}_{\alpha \in A}$ を座標近傍系とする M と同じ次元の位相多様体になる. N を M の **開部分多様体** (open submanifold) という.

例 4 (積多様体) (product manifold) M^m, N^n をそれぞれ m 次元, n 次元の位相多様体とし, $\mathcal{S} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{S}' := \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ をそれぞれ M, N の座標近傍系とする. このとき, $M \times N$ は, $\mathcal{S} \times \mathcal{S}' :=$
$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$, $\varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \xrightarrow{\approx} U'_\alpha \times V'_\beta \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$, $(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)))$
を座標近傍系とする $m+n$ 次元位相多様体になる. (演習問題)

注: $\mathbb{R}^n$ は Hausdorff 空間であり, Hausdorff 空間 X の部分空間や, 2 つの Hausdorff 空間 X, Y の積空間は Hausdorff 空間になる. (演習問題) 従って, 上の例 1-4 は全て Hausdorff 空間になる.

位相多様体 M は位相空間としては 局所コンパクト Hausdorff 空間である.
また, M が位相空間として コンパクト, 連結等のときそれぞれコンパクト多様体, 連結多様体等と呼ばれる.
なお, 通常 位相多様体の各連結成分は第 2 可算公理をみたす (同値な条件として paracompact) と仮定される.

座標変換 座標近傍系 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ と $\alpha,\beta\in A$ に対し, $U_{\alpha\beta}:=U_\alpha\cap U_\beta=U_\beta\cap U_\alpha=:U_{\beta\alpha}$ とおく. (図)
$U_{\alpha\beta}\neq\emptyset$ のとき, $U'_{\alpha\beta}:=\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ $(\subset U'_\alpha)$, $U'_{\beta\alpha}:=\varphi_\beta(U_{\beta\alpha})$ $(\subset U'_\beta)$ とおくとこれらは共に $\mathbb{R}^m$ の開集合で $U_{\alpha\beta}$ と同相: $U'_{\alpha\beta}\xleftarrow[\approx]{\varphi_\alpha}U_{\alpha\beta}=U_{\beta\alpha}\xrightarrow[\approx]{\varphi_\beta}U'_{\beta\alpha}$
合成写像 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ を $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ から (U_β,φ_β) への **座標変換** という. $F_{\beta\alpha}$ とおくと:

$$F_{\beta\alpha}:=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:U'_{\alpha\beta}\to U'_{\beta\alpha}.\qquad (\text{略さず書くと } F_{\beta\alpha}:=(\varphi_\beta|_{(U_\beta\cap U_\alpha)})\circ(\varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)}).)$$

$p\in U_{\alpha\beta}$ に対し, $x=\varphi_\alpha(p)\in U'_{\alpha\beta}\subset U'_\alpha\subset\mathbb{R}^m$ の座標を $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$, $y=\varphi_\beta(p)\in U'_{\beta\alpha}\subset U'_\beta\subset\mathbb{R}^m$ の座標を $y=(y_1,y_2,\dots,y_m)$ とすると,

$$F_{\beta\alpha}(x)=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(x)=\varphi_\beta(p)=y$$

$F_{\beta\alpha}$ を成分関数 $F^1_{\beta\alpha},\dots,F^m_{\beta\alpha}:U'_{\alpha\beta}\to\mathbb{R}$ で表すと

$$y=F_{\beta\alpha}(x)=(F^1_{\beta\alpha}(x),\dots,F^m_{\beta\alpha}(x)),\quad y_i=F^i_{\beta\alpha}(x)=F^i_{\beta\alpha}(x_1,x_2,\dots,x_m),$$

微積分学の流儀に従うと

$$y=y(x)=(y_1(x),y_2(x),\dots,y_m(x)),\quad y_i(x)=y_i(x_1,x_2,\dots,x_m)$$

と表せ, $U'_{\alpha\beta},U'_{\beta\alpha}$ が $\mathbb{R}^m$ の開集合なので微分可能性が考えられる.

定義 $r=1,2,\dots$ と $\mathbb{R}^m$ の開集合 U',V' について,
関数 $F:U'\to\mathbb{R}$ が C^r **級** $\longleftrightarrow$ r 階まで (偏) 微分可能で, r 階までの (偏) 導関数が全て連続.
写像 $F=(F^1,F^2,\dots,F^m):U'\to V'$ が C^r **級** $\longleftrightarrow$ 全ての成分関数 $F^i:U'\to\mathbb{R}$ が C^r級.
関数や写像 F が C^∞ **級** $\longleftrightarrow$ 全ての $r=1,2,\dots$ について F は C^r 級. なお, C^0 **級** = 連続とする.
$r=1,2,\dots,\infty$ について, 写像 $F:U'\to V'$ が
C^r **級微分同相** (diffeomorphism of class C^r) $\longleftrightarrow$ F は同相写像で F と逆写像 F^{-1} が共に C^r 級.
(注) C^∞ 級関数 $F:U\to\mathbb{R}$ が実解析的 (real analytic) 又は C^ω 級 $\longleftrightarrow$ U の各点 x_0 での Taylor 展開が x_0 のある近傍で収束する ($\Leftrightarrow$ 収束半径が正). 写像 F が C^ω 級 $\longleftrightarrow$ 各成分関数が C^ω 級. C^ω 級微分同相も同様.
(複素解析的 (complex analytic, holomorphic) の定義もあるが「複素解析」参照のこと.)
• 以下, $r=1,2,\cdots,\infty$ $(,\omega)$ とする. ($(C^\omega\Rightarrow)$ $C^\infty\Rightarrow\cdots C^r\Rightarrow\cdots C^1$)
• 初等関数, 即ち, 多項式, 有理関数 (= 多項式/多項式), 三角関数, 逆三角関数, 指数関数, 対数関数, n 乗根 と, これらに加減乗除, 合成を有限回施してえられる関数, は適当な定義域において C^∞ 級 (C^ω 級) (微積分学の結果). 適当な定義域とは, 例えば, 有理関数においては分母 $\neq 0$, $\sqrt{x}$ では $x>0$ となる範囲等.
例 5 (1) 開区間 (a,b) と (c,d) は一次関数により $C^\infty(C^\omega)$ 級微分同相.
(2) $(-1,1)$ と $\mathbb{R}$ は $y=\tan\frac{\pi}{2}x$ により $C^\infty(C^\omega)$ 級微分同相.
(3) n 次元単位開球体 $B^n:=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x|^2<1\}$ と $\mathbb{R}^n$ は $F:B^n\to\mathbb{R}^n$, $y=F(x):=x/\sqrt{1-|x|^2}$ により $C^\infty(C^\omega)$ 級微分同相. (ここで $|x|=\|x\|:=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ (ユークリッドノルム)) (問)
(4) **逆関数定理** U を $\mathbb{R}^n$ の開集合, $F:U\to\mathbb{R}^n$ を C^r 級写像 $(r\geqq 1)$ とする.
(i) 点 $a\in U$ における Jacobi 行列 JF_a が正則 ($\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}JF_a=n\Leftrightarrow\det JF_a\neq 0$) ならば, a の近傍 V で, $F(V)$ は $F(a)$ の近傍になり, $F|_V:V\to F(V)$ が C^r 級微分同相になるものがある. (局所微分同相 (local diffeo.) という.)
(ii) $F:U\to\mathbb{R}^n$ を C^r 級**単射**とするとき, U の全ての点 a において Jacobi 行列 JF_a が正則ならば $F(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合で F は U から $F(U)$ への C^r 級微分同相である.

(注) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=F(x):=x^3$ は同相かつ C^∞ 級だが, 逆関数は $y=0$ で微分不能なので F は微分同相ではない.

定義 (C^r 級微分可能多様体) 位相多様体 M とその座標近傍系 $\mathcal{S}:=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ について,
(3) $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ となる全ての $\alpha,\beta\in A$ に対し, 座標変換 $F_{\beta\alpha}:=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ が C^r 級となる,
をみたすとき, $M=(M,\mathcal{S})$ を C^r **級微分可能多様体**, または C^r **級可微分多様体** (differentiable manifold of class C^r), 略して C^r **級多様体 (C^r-manifold)**, または単に**多様体**という. 即ち,
位相空間 M が次の 3 条件をみたすとき, $M=(M,\mathcal{S})$ を C^r **級微分可能多様体** という:
(1) 座標近傍系 $\mathcal{S}:=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ $(M=\bigcup_{\alpha\in A},\ \varphi_\alpha:U_\alpha\xrightarrow{\approx}U'_\alpha\underset{\text{open}}{\subset}\mathbb{R}^m)$ が存在する,
(2) M は Hausdorff 空間,
(3) $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ となる全ての $\alpha,\beta\in A$ に対し, 座標変換 $F_{\beta\alpha}:=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ が C^r 級.
このとき, $\mathcal{S}:=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を C^r **級座標近傍系** (C^r-atlas) といい, $\mathcal{S}$ は M に C^r **級微分構造**を定めるという.
上の定義には $F_{\beta\alpha},F_{\alpha\beta}$ が共に C^r 級となる事が含まれており, $F_{\alpha\beta}=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}=(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})^{-1}=F_{\beta\alpha}^{-1}$ なので, これらは C^r 級微分同相.

(注) C^∞ 級多様体は**滑らかな**多様体 (smooth manifold) ともいわれる.
(注) $m=0$ のとき $\mathbb{R}^0:=\{0\}$ とする. 従って, M が 0 次元多様体 $\Leftrightarrow M$ は離散空間. (問)
(注) $\mathbb{R}^m$ の部分集合 S からの写像 (関数) $f:S\to\mathbb{R}^m$ が C^r 級とは f は S のある開近傍 U からの C^r 級写像 $\tilde{f}:U\to\mathbb{R}^m$ の制限写像 $f=\tilde{f}|_S$ になっている ($\Leftrightarrow f$ はある開近傍 U からの C^r 級写像 $\tilde{f}$ に拡張される) ときをいう. 特に $S=\{p\}$ のときは f は点 p で C^r 級であるという.

例 例 1 $(\mathbb{R}^m, 1_{\mathbb{R}^m})$, $(U, 1_U))$ は C^∞ (C^ω) 級多様体, 例 2 (滑らかな曲面) は C^∞ 級多様体,
例 3: M が C^r 級多様体, N が M の開集合 $\Rightarrow N$ は C^r 級多様体. (問)
例 4: M, N が C^r 級多様体 $\Rightarrow M\times N$ は C^r 級多様体. 特に n 次元 torus $T^n:=S^1\times\cdots\times S^1$ は C^∞ (C^ω) 級多様体.
例 1 $M(n;\mathbb{R}):=n$ 次実正方行列全体 とするとき成分の並び順を指定することにより
(例えば, $\varphi((x_{ij}))=(x_{11},\ldots,x_{1n},x_{21},\ldots,x_{2n},\ldots)$ など) $M(n;\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ とみなせるので C^∞ 級多様体である.
$\mathbb{C}^n$, $M(n;\mathbb{C})$ も実部と虚部の並び順を指定することによりそれぞれ $\mathbb{R}^{2n}$. $\mathbb{R}^{2n^2}$ とみなせるので C^∞ 級多様体である.
$GL(n,\mathbb{R})$ $(GL(n,\mathbb{C})):=n$ 次実 (複素) 正則行列全体 は $M(n;\mathbb{R})$ $(M(n;\mathbb{C}))$ の開部分多様体として C^∞ 級多様体.
(S^n の例のプリント参照)

微分構造 位相多様体 M 上の 2 つの C^r 級座標近傍系 $\mathcal{S}:=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, $\mathcal{T}:=\{(V_\beta,\psi_\beta\}_{\beta\in B}$ について,
$\mathcal{S}\cup\mathcal{T}$ が M の C^r 級座標近傍系になるとき, 即ち, 座標変換 $\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$, $\varphi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}$ が全ての α,β について C^r 級 (又は $U_\alpha\cap V_\beta=\emptyset$) になるとき, $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ は, **同じ** C^r **級微分構造** (C^r 構造) を定める, または**同値**であるという. (これは同値関係になる. (問)) また, $\mathcal{S}$ の同値類 $[\mathcal{S}]_r$ を $\mathcal{S}$ の定める C^r **級微分構造** (C^r 構造, C^rstructure) という.
$\mathcal{S}$ に M の座標近傍 (U,φ) を付け加えて $\mathcal{S}\cup\{(U,\varphi)\}$ がまた C^r 級座標近傍系になるとき (U,φ) を $(M,\mathcal{S})$ の C^r **級座標近傍** (C^r-chart) という. $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathcal{S}$ の開集合 $V\subset U_\alpha$ への制限 $(V,\varphi_\alpha|_V:V\to V')$ やこれに C^r 級微分同相 $F:V'\overset{\cong}{\to}V''\subset\mathbb{R}^n$ を合成した $(V,F\circ\varphi_\alpha|_V:V\overset{\cong}{\to}V'')$ も $(M,\mathcal{S})$ の C^r 級座標近傍になる.(問) 従って特に, 任意の点 $p\in M$ に対し p を含む C^r 級座標近傍 $(V,\psi:V\to V')$ で $\psi(p)=0$ かつ V' が $\mathbb{R}^n$ や (都合の良い大きさの) 開球体, 開立方体になるものが取れる. (問) (このことを拡張して:)

極大座標近傍系 M 上の C^r 級座標近傍系 $\mathcal{S}$ と同値な C^r 級座標近傍系全体の集合の和集合 $\tilde{\mathcal{S}}$ はまた $\mathcal{S}$ と同値になり, M の C^r 座標近傍系全体に包含関係による (半) 順序を入れるとき, $\tilde{\mathcal{S}}$ は極大元になる. (問: これを示せ.)
この $\tilde{\mathcal{S}}$ を $\mathcal{S}$ の定める C^r **級極大座標近傍系** といい, $\mathcal{S}$ は $\tilde{\mathcal{S}}$ に**従属する**, という. ($\tilde{\mathcal{S}}$ を C^r 構造ということもある.)

• 今後, M の C^r 級座標近傍系 $\mathcal{S}$ が与えられたときは常に極大座標近傍系 $\tilde{\mathcal{S}}$ も同時に考えておく.

$r<s$ のとき C^s 級座標近傍系 $\mathcal{S}'$ は C^r 級座標近傍系でもある. 従って, C^r 級座標近傍系 $\mathcal{S}$ の定める C^r 構造 $[\mathcal{S}]_r$ は C^s 級座標近傍系 $\mathcal{S}'$ を含むか?, また含むならばいくつ含むか? という問題が考えられる. これについては
• $(M,\mathcal{S})$ が C^r 級多様体 $(r\geqq 1)$ で, M の各連結成分が第二可算公理をみたす (同値な条件として paracompact である) とき, $\mathcal{S}$ の定める C^r 構造 $[\mathcal{S}]_r$ は C^∞ 級座標近傍系 $\mathcal{S}'$ を含み, その C^∞ 構造は一意的である, 即ち, もう一つ C^∞ 級座標近傍系 $\mathcal{S}''$ $([\mathcal{S}'']_r=[\mathcal{S}]_r)$ があれば $[\mathcal{S}']_\infty=[\mathcal{S}'']_\infty$. (Whitney(1936) による.) 従って,

• C^r 級多様体は常に C^∞ 構造をもつので C^∞ 級多様体と考えてよい. また, 単に「微分構造」といえば C^∞ 構造のこととされ, C^∞ 構造は smooth structure (平滑構造) とも言われる.

(注) 位相多様体 M には微分構造を持たないものもあり, また, 複数の微分構造をもつものもある.
(注) ここで述べた多様体は「境界のない多様体」といわれる. 境界をもつ多様体はこの講義では扱わない.

◯ 今後, 「多様体 M」といえば C^r 級多様体 $M=(M,\mathcal{S})$ $(r\geqq 1)$ のことで, M の各連結成分は第二可算公理をみたす ($\Leftrightarrow M$ は paracompact である) とする.