第1回.

講義の目標: 金利(Interest Rate) modelの理論を紹介する事.

Contents (計画).

0. Introduction, … 金利の説明 他.

1. 金利市場　商品(代表的な), 市場の慣習, 金利曲線.

(古典的な model (Black model) は上手くいかない.)

2. 数学的道具箱の準備, 紹介.
   - 確率, 条件付期待値, Martingale, 確率過程, Itoの公式.
   - "Numeraire変換の下でのself financing conditionの不変性"

   ・厳密にはやらない(出来ない)
   ・式変形は間違えずに出来る様にするのがここでの目標.

3. 金利の期間構造
   … 無裁定条件. 同値マルチンゲール測度. Numeraire変換.

4. HJM 理論.
   - Forward rate.
   - short rate models as special cases of HJM models.

5. Market Models.
   - Change of numéraire
   - forward measure.
   - formal construction.

   - LIBOR market model
   - Swap market model.
   - Implementation.

教科書: 以下の2冊に従う.

[1] Damiano Brigo & Fabio Mercurio, "Interest Rate Models, Theory and practice". Springer-Verlag (2001)
ISBN 3-540-41772-9

[2] Tomas Björk "Arbitrage Theory in Continuous Time" (2nd ed. 2004. 3rd ed. 2009)　図書館に2冊有り.
Oxford University Press (New York)

(注意) 邦訳が出版されているが, 原書を読むこと!!
理由: (1) 重要な部分が削られている特に, この本の良い箇所が訳出されていない.
(2) 版が古い.

数学の教科書.
Keyword: 確率微分方程式

(3) 長井英生「確率微分方程式」共立出版.
(4) エクセンダール「確率微分方程式 … 入門から応用まで」ジュプリンガー フェアラーグ東京. (1999/03)
ISBN-10: 4431708049

(4)は邦訳が一番良い.

No.
Date.

有名だが [2] を読めば良い。内容はほぼ [2] でカバーされていて [2] の方が良い。

[3], [4] を読む為に:

[5] Shreve, S.E. "Stochastic Calculus for Finance II" -- Continuous-Time Model"
Springer-Verlag (2004)
ISBN 0387401016
邦訳: ジョリーブ「ファイナンスのための確率解析 II 連続時間モデル」
シュプリンガー・ジャパン (株)
ISBN 978-4-431-10026-3

[2] にも解説がある
簡単

その他. 数学を使わないが、非常に良い本. 並行して読むと良い。* 業界では誰もが知っている本.

[6] J. Hull "Options, Futures, and Other Derivatives" 6th ed.
Prentice-Hall
良書であった。
出来たら古書店で第3版, 第4版あたりを買うのが良い。

[7] B. Tuckman "Fixed Income Securities" 2nd. ed.
John Wiley & Sons
ISBN 0-471-06322-3

[6][7] は この業界に行くなら必須

・金利に関するその他の図書.

L.B.G. Andersen and Vladimir V. Piterbarg

[8] "Interest Rate Modeling. Volume 1: Foundations and Vanilla models"

[9] "Interest Rate Modeling Volume 2: Term Structure Models"

[10] "Interest Rate Modeling Volume 3: Products and Risk management"

Atlantic Financial Press. (2010年).

所謂「Lehman ショック」以前に確立されたところの「市場リスクのみを考える金利の理論」について包括的に書かれている.
(図書館にある. 2~3冊づつ)
厚い本だが数学的に難しいことは余り書かれていなく読み易い.

---

[11] Damire Filipovic "Term Structure Models: A Graduate Course"
Springer (2009)

- 数学的に書かれた本. 最も良い本であるが, やや難しい.
数学的に何が問題なのかを知りたい人, 背後にある数学を知りたい人にとっては唯一の本.
- 図書館にある.

以上が、講義の範囲の text であるが、前述の通り、2008年以後 (= Lehman shock) は、これらの理論だけでは話がすまなくなっている。

Keyword: "Counter party risk."

No.
Date.

0. Introduction

• 金利 ---> 株, 先物 etc と比較すると難かしい。 (商品) → 実務では最も重要なもの!!

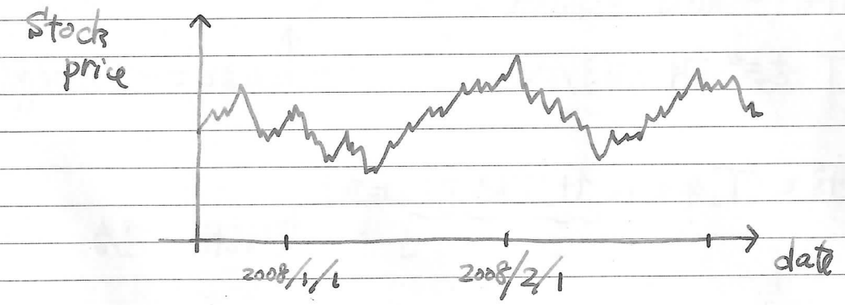
理由: 期間構造の存在.

株式 … 実数値 (1つの数字で表現できる) = 株価

金利 … ある時点の金利は曲線 (= 無限個の数字の組)

曲線が この時間と伴に変動する

株式の変動の様子



通常の --- グラフで表現出来る.

金利は?

No.
Date.

(注意) 金利を考える時、(というか、finance の世界では) は
時間の単位は年 (year).
金利も 1年当たりに換算して表示する。

金利は、期間、期日で決まる。

今日の金利、はない。

今日の、1年ものの金利.
〃 2 〃 〃
〃 3 〃 〃 がある。

T … 期間 (= 期日 = 満期) (今の場合)

満期 = maturity
期間 = tenure

R(T) … T を満期とする金利.

あとになるとこの2つを使い分ける。

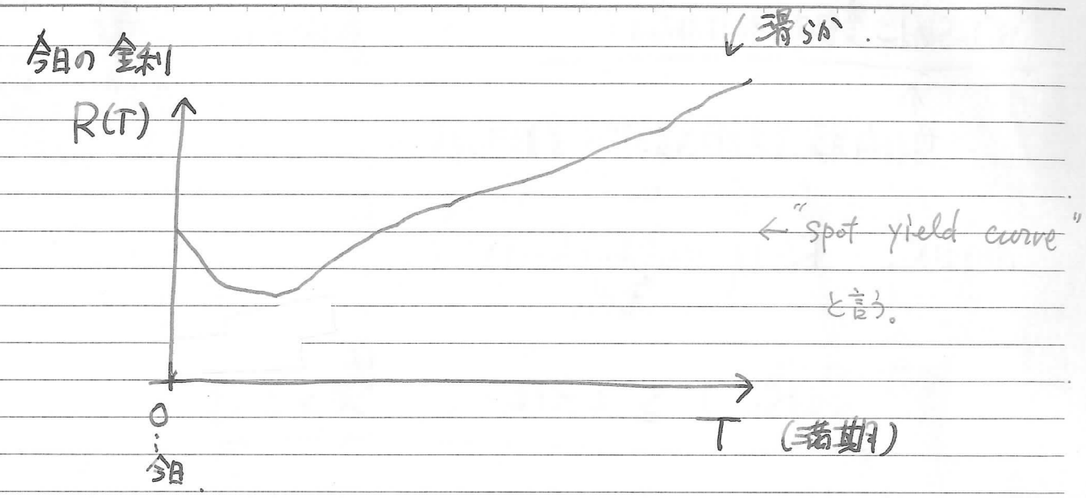
⟺ def.

今、1. あずけると T年後に $1+TR(T)$ になる
… 単利計算の場合 (表示)

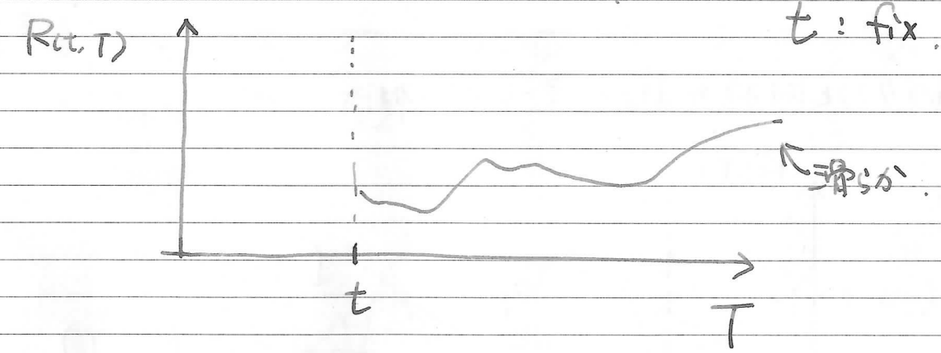
〃 $e^{TR(T)}$ … 連続複利表示の場合.

(注) 金利は市場で決まる。政府や日銀 (中央銀行) が決めるわけではない!!

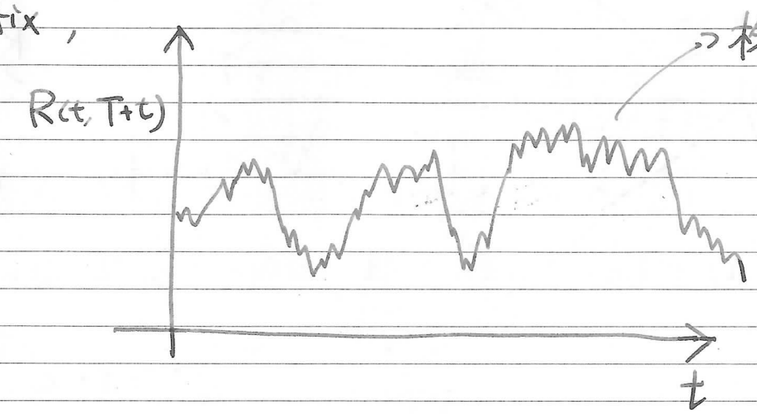
No.
Date.



R(t, T) … 時刻 t に於ける、満期 T の金利.
(R(0, T) = R(T))



T : fix,



でたらめに変動するわけではない!!

↑

期間構造を保ちながら変動する.

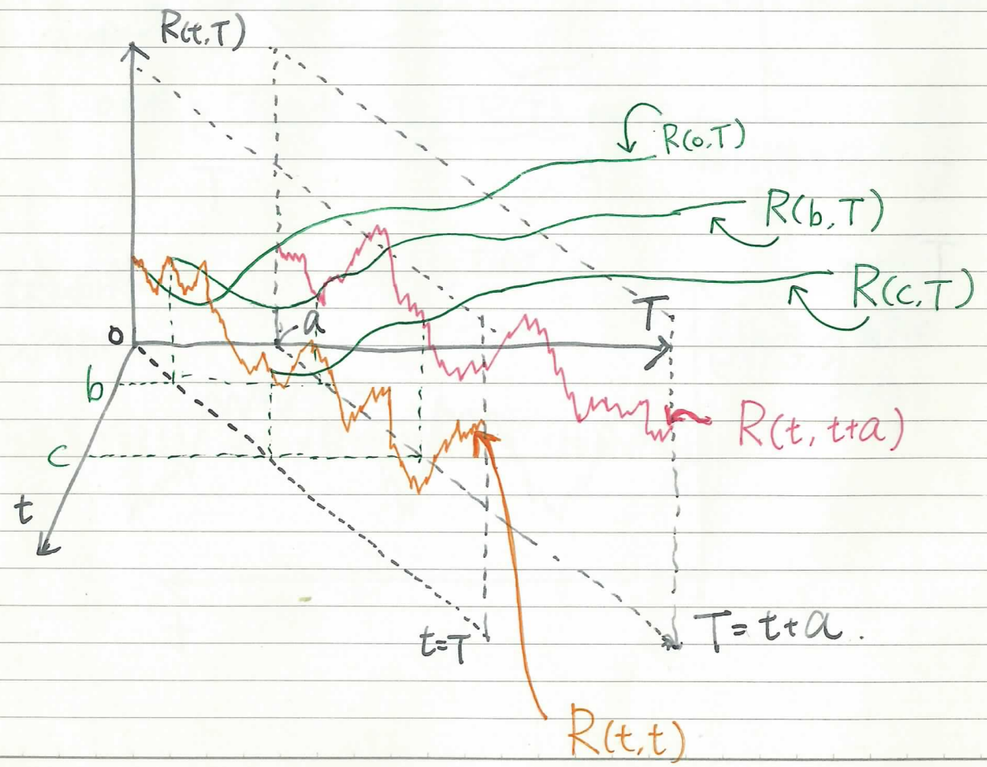
例えば、 $R(T)$ は(単利)表示とするとき.
(or 複利)

$$sR(s) \leq tR(t) \quad \forall s \leq \forall t$$

である!!

何故か?

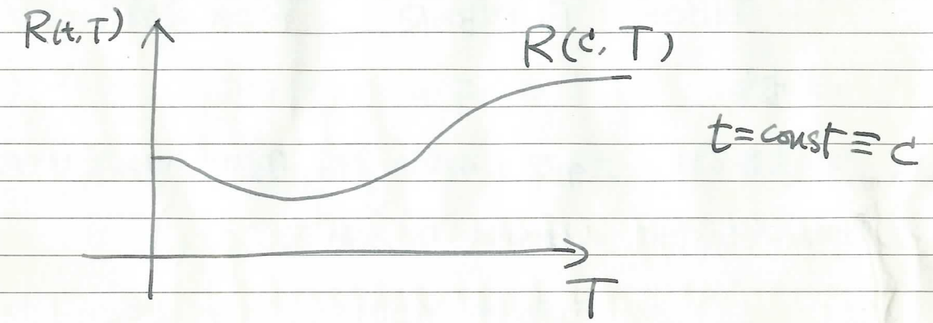
株価のグラフと同様の時系列データのグラフは.



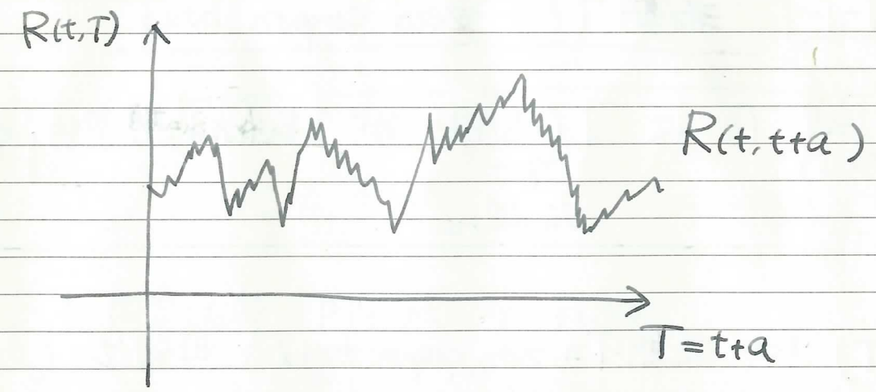
の様な複雑な曲面となる。

• Data からわかる事

平面, $t = \text{const}$ で切断したときには滑らかな curve
(これを yield curve と言う).



平面 $t-T+a=0$ で切断した時には, 株価のグラフの様に激しく振動するグラフになる.



更に, 前述の様に, この曲線は期間構造という制約をみたしながら変動する.

1. 金利市場.

国債 -- Bond.
LIBOR (= London Interbank Offered rate)

→ ここが重要. 「国」は default (倒産) しない. と考えるので.

← TIBOR, EURIBOR, ... もこれに合好事にする.

の 2 つが重要

以後, 本講義では. 上の 2 つの間に厳密な違いは無いものとして考える.

1-1 : Zero coupon bond (又は zero Bond)

(別名: pure discount bond, 割引債) // T-bond とも言う.

Def 1-1-1 満期 T の zero coupon bond

= 「時刻 T (期日) に 1 (USD) が支払われるという契約」

US dollars.

$P(t,T)$:= 満期 T の zero coupon bond の時刻 t $(0 \le t \le T)$ における価値.

Remark 1-1-1

$$P(T,T) = 1 \quad \text{for } \forall T > 0.$$

以下の仮定の下で議論する。

全ての満期 T の金利が市場できまる

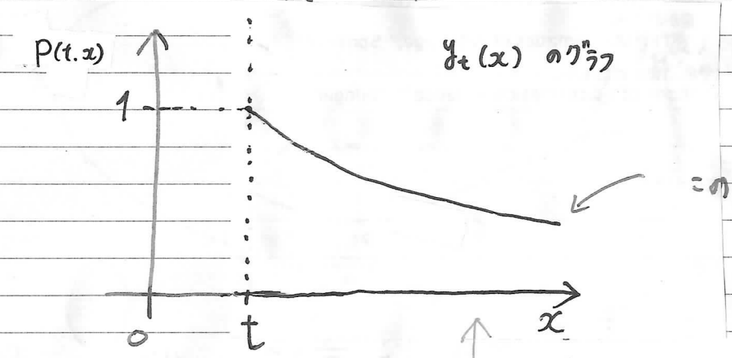
仮定 1-1-1

(1) $\forall T > 0$, T-bond が存在し. 市場に流通している.
(= 好きなだけ自由に売り買いが出来る.)

(2) $\forall t > 0$, 曲線 $y_t(T) := P(t,T)$

すなわち, 曲線, $y_t : x \longmapsto P(t,x)$ $\quad x \ge t$

は x に関して微分可能.



この curve が微分可能.

"時刻 t に於ける bond price curve",
"時刻 t に於ける期間構造"
etc. と言う。

では, T を固定した時. $P(t,T)$ はどうなるか?

⇓

すなわち, 満期 T の zero bond の時刻 t での価格.

→ これが t と伴にどの様に変動するか?

T-bond は市場で取引されている

⇒ (株価の様に) 変動する!!

→ Wiener 過程 となる.

・用語に関する memo:

zero coupon bond

↑ わざわざこの様に言う理由:

・通常の(流通量の多い)国債は、coupon が付いている。

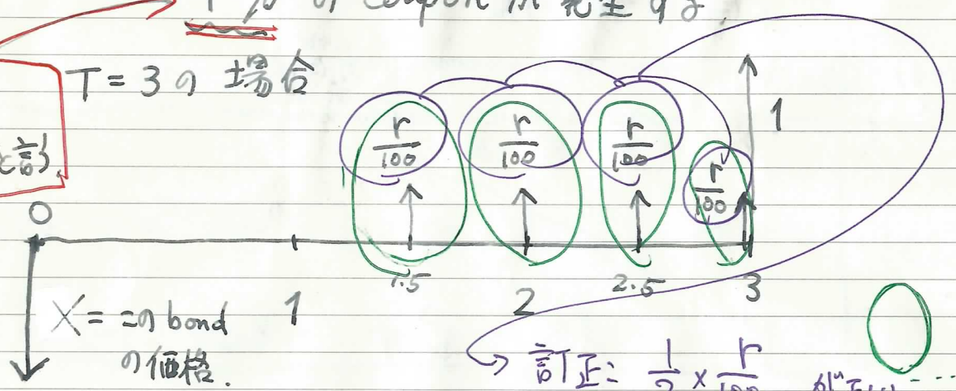
(例) $T \geq 2$ (yr)

利付債 --- 債券購入後、1年を超えると半年毎に(= semi annually)

r% の coupon が発生する。

coupon rate と言う

T = 3 の場合



訂正: $\frac{1}{2} \times \frac{r}{100}$ が正しい。--- coupon

という cash flow (= 金の流れ, 受け払い) が発生する

coupon の付いている債券 = coupon bearing bond
(利付債)
と言う。

⇒ 現実には殆んどの国債は 利付債

zero coupon bond として発行されるのは満期の短いものだけ。

↓

割引債

(参考).

日本国の国債の場合:

利付債: T = 2, 3, 5, 6, 10, 20, 30, 40

割引債: T = $\frac{1}{2}$, 1, 3

(T = 60日の割引債もある = 政府短期証券)

その他 ... 変動利付債, 物価連動債. etc.

↑

coupon rate が入札で決まる(らしい)

詳しい事は知らない ...

日数計算 (Day count convention) に関する注意

時刻 t と時刻 s の間の"期間"あるいは"長さ"の定義は、本講義では単純に $t-s$ ($t \geq s$ の場合) と定める。

現実の取引きでは、様々な複雑な定義によって計算される。

(例) $\dfrac{t\text{と}s\text{の間の日数}}{365}$, $\dfrac{t\text{と}s\text{の間の日数}}{365+\frac{1}{4}}$,

$\dfrac{(t\text{と}s\text{の間の月数})\times 30 + \text{残りの日数}}{360}$,

etc.

1-2: 連続複利, 単利, spot rate

↑ market の用語と違う…が、こっちのイミでも使われる。混乱がある。

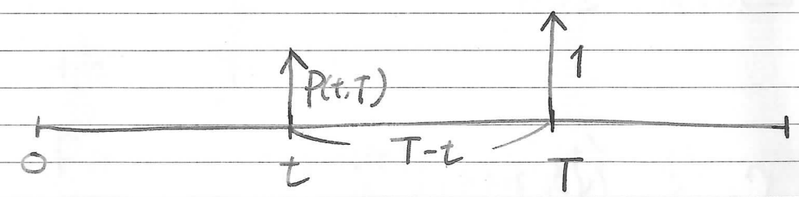
定義 1-2-1 Continuously-compounded spot interest rate (Spot 複利)

時刻 t に於ける、T での continuously-compounded spot interest rate を $R(t,T)$ と記し、次式で定義する:

$$R(t,T) = \frac{-\log P(t,T)}{T-t}$$

この定義は次式と同値:

$$e^{(T-t)R(t,T)}\,P(t,T) = 1$$



…… ~~$P(t,T)$ を利子 $R(t,T)$ で(連続複利で)運用すると時刻 T で~~

t と T の間の利率を連続複利で考えたものが $R(t,T)$

という事。

(spot 単利)

定義 1-2-2. Simply-compounded spot interest rate.

時刻 t に於ける T での simply-compounded spot interest rate を $L(t,T)$ と記し、

$$L(t,T) = \frac{1-P(t,T)}{(T-t)P(t,T)}$$

に従って定義する。

$$\Longleftrightarrow \quad P(t,T)\left(1+(T-t)L(t,T)\right) = 1$$

t と T の間の利率を単利で考えたものが $L(t,T)$.

◎ 単利と複利についてのおさらい.

単利計算

年利率 r で N年あずけると、

$$\$1 \longrightarrow \$(1+Nr)$$

複利計算 (連続複利)

微小区間 Δt での利率が r である.

$B(0)=1$ $\quad$ $B(s)$ … 時刻 s での銀行口座の残高

$$B(s+\Delta t) = B(s)(1+r\Delta t)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{B(s+\Delta t)-B(s)}{\Delta t} = rB(s)$$

$\Delta t \to 0$

$$\Longrightarrow \frac{dB(s)}{ds} = rB(s),\ B(0)=1$$

$$\Longleftrightarrow B(s) = e^{rs}.$$

$$\left(\Longrightarrow \$1 \xrightarrow[\text{N年預ける}]{} \$e^{rN}\right)$$

その他: 半年複利, 年複利 etc.

$$P(t,T)\left(1+(T-t)L(t,T)\right) = 1$$

$$P(t,T)\,e^{(T-t)R(t,T)} = 1$$

「$P(t,T)$ 預金して、$(T-t)$ 経過すると 1 になる」

年複利 $Y(t,T)$.

$$P(t,T)\underbrace{(1+Y(t,T))\times\cdots\times(1+Y(t,T))}_{T-t\text{ 回}} = 1$$

(1年毎にあずけ直す.)

$$\Longrightarrow P(t,T)\left(1+Y(t,T)\right)^{(T-t)} = 1.$$

一般化.

$$\Rightarrow Y(t,T) = \frac{1}{(P(t,T))^{1/(T-t)}} - 1$$

… 年複利.

$1/k$ 年複利 を $Y^k(t,T)$ と書くことにすると、

$$P(t,T)\left(1+\frac{1}{k}Y^k(t,T)\right)^{(T-t)k} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad Y^k(t,T) = \frac{k}{\left(P(t,T)\right)^{1/(k(T-t))}} - k$$

$\boxed{k \to \infty \text{ とすると、} \quad Y^k(t,T) \to R(t,T)}$

（↑「連続複利」という意味，理由）

◎ short rate $r(t)$

$$\lim_{T\to t+0} R(t,T) = \lim_{T\to t+0} L(t,T) = \lim_{T\to t+0} Y^k(t,T)$$

$$=: r(t)$$

… short rate

1-3 Forward Rates …… 金利理論の主役

"Forward" の復習
（先渡）

		receive now	receive future
payment	now	cash & carry（現金取引）	lend（貸し）
	future	borrow（借り）	Forward contract

i.e. Forward … 未来の取引きに関する合意を今（又は或る時刻 t で）行なう事。

◎ FRA（= Forward Rate Agreement）

未来のある期間 $[T, S]$ の間の金利を，$t \leq T$ なる時点 t に於いて合意（契約）する事を FRA と言う。

◎ Def. 1-3-1 Forward Rate. (simply compounded, or continuously compounded)

期間 $[T, S]$ に関する、時刻 t に於ける FRA の価値を 0 とする様な金利を "t に於ける $[T, S]$ 間の Forward Rate（先渡金利）" と謂い、$F(t; T, S)$ 等と記す。

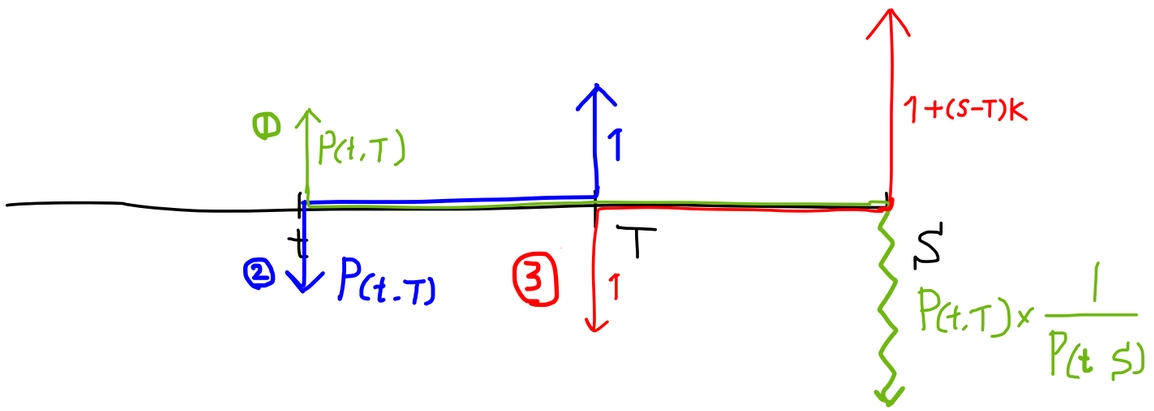
（参考：Forward price（= 先渡価格）とは，先渡契約の価値が 0 になる様な価格であった。）

21

此等を求めてみる.

FRA(t,T,S,K) … 期間[T,S]に於ける金利をKとする契約の時刻 t での価値 ここでは単利で計算
(預金金額あたりの値)

FRA(t,T,S,K) を求めてみる.



① 市場から満期 S で P(t,T) だけ借金
② 市場へ①で借りたお金を満期 T で貸す(預ける)
③ FRA(t,T,S,K)

→ とすると上図の様に これらをまとめたものは, 時刻 S における

$\boxed{1+(S-T)K - \frac{P(t,T)}{P(t,S)}}$ という cash flow となる

↑

この cash flow を CF_S とする

CF_S の 時刻 t における価値 CF_t は

$CF_t = CF_S \times P(t,S)$ によって求められるので,

22

$$FRA(t,T,S,K) = CF_t = P(t,S)\,CF_S$$

$$= P(t,S)\left(1+(S-T)K - \frac{P(t,T)}{P(t,S)}\right)$$

$$= P(t,S)(1+(S-T)K) - P(t,T)$$

$$\Rightarrow \boxed{FRA(t,T,S,K) = P(t,S)(1+(S-T)K) - P(t,T)}$$

Prop 1-3-1 simply compounded Forward Rate.

$$F(t;T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right)$$

Cor.

$$FRA(t,T,S,K) = P(t,S)(S-T)\left(K - F(t;T,S)\right)$$

問題 1.

Cor. を導出せよ。

注意:
(1) $F(t;T,S)$ は時刻 t で確定する.
(2) ($t<T$ の場合) $L(T,S)$ は時刻 t では未定である.
… この時点では未だ確率変数.

Def. 1-3-2 Instantaneous forward rate
(瞬間先渡金利)

$$f(t,T) := \lim_{S \to T+0} F(t;T,S)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial s}\left(\log P(t,s)\right)\Big|_{s=T}$$

を 時刻 t に於ける $\left\{\begin{array}{l}\text{T時点の}\\ \text{満期T}\end{array}\right\}$ の instantaneous forward rate

という。

(Remark: 1-3-1)

(1) 注意: $r(t)$, $f(t,T)$ について。

$$r(t) := \lim_{T \to t+0} R(t,T)$$ と定めたのであった。(P18)

$$\left(= \lim_{T \to t+0} L(t,T) \right)$$

$\Delta t > 0$ とする。

$$R(t, t+\Delta t) = \frac{-\log P(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = \frac{-(\log P(t, t+\Delta t) - \log P(t,t))}{\Delta t}$$

↑ Def 1-2-1

$$\xrightarrow[\Delta t \to 0+0]{} -\frac{\partial}{\partial T}(\log P(t,T))\Big|_{T=t}.$$

一方、Def 1-3-2 で定めた様に、瞬間先渡金利 (instantaneous forward rate) $f(t,T)$ は、

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial s}(\log P(t,s))\Big|_{s=T}$$

であった。

直ちに、 $r(t) = f(t,t)$ がわかる。

↑ 此を定義に採用しても良い。

(2): 定義より直ちにわかる $f(t,T)$ と $P(t,T)$ の重要な関係:

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,du\right).$$

が成立する。

(∵)

$$-\int_t^T f(t,u)\,du = \int_t^T \frac{\partial(\log P(t,s))}{\partial s}\Big|_{s=u} du$$

$$= \log P(t,T) - \underbrace{\log P(t,t)}_{=0} = \log P(t,T)$$

$$\Longleftrightarrow \quad P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,du\right).$$

//

(3) short rate $r(t)$ について同様の概念を考える事が出来る:

$$D(t,T) := \exp\left(-\int_t^T r(u)\,du\right)$$

⋮

Stochastic discount factor

- $D(t,T)$ は時刻 t に於ける確率変数。
- $D(t,T)$ の意味はややこしいので後述。

1-4: 金利SWAP, SWAP rates, forward Swap rates.

… 金利市場の主役.

金利Swap (Interest Rate Swap) … FRA (P19) を一般化したもの.
‖
IRS

FRA … 未来の或る期間 [T, S] の間の金利を K とする, $t \leq T$ なる時点 t に於~~ける~~ 合意~~する事~~.

IRS … 未来の, 連続する複数の期間 $\{[T_\alpha, T_{\alpha+1}], [T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}], \ldots, [T_{\beta-1}, T_\beta]\}$ の間の金利を K とする, $t \leq T_\alpha$ なる時点 t に於ける合意 (契約).

⟹ これは, この期間に於いて, 固定金利による利払い (K) と, 浮動金利 (= floating rate) による利払い とを交換する事 (SWAP)
‖
市場金利 ($L(T, S)$, $R(T, S)$)
単利　連続複利

と等価である。

(∵ FRA (t, T, S, K) を計算した時の図を参照)

再掲

(FRA(t, T, S, K) の価値の計算)

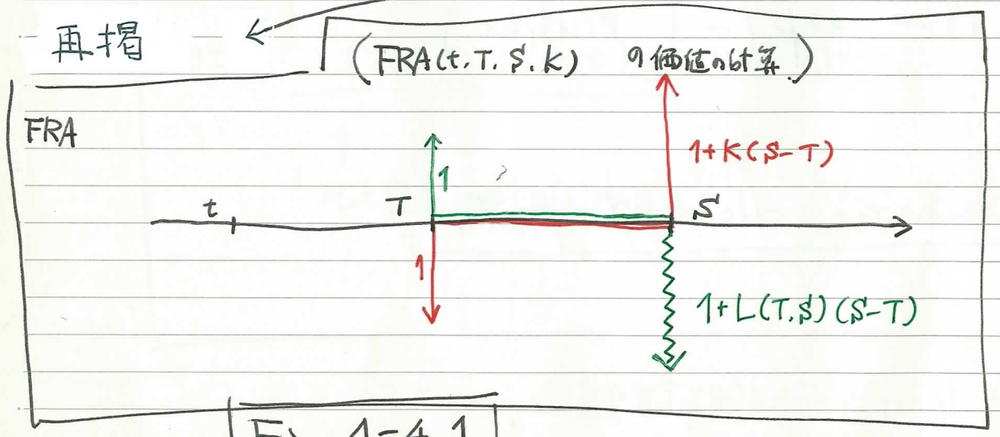


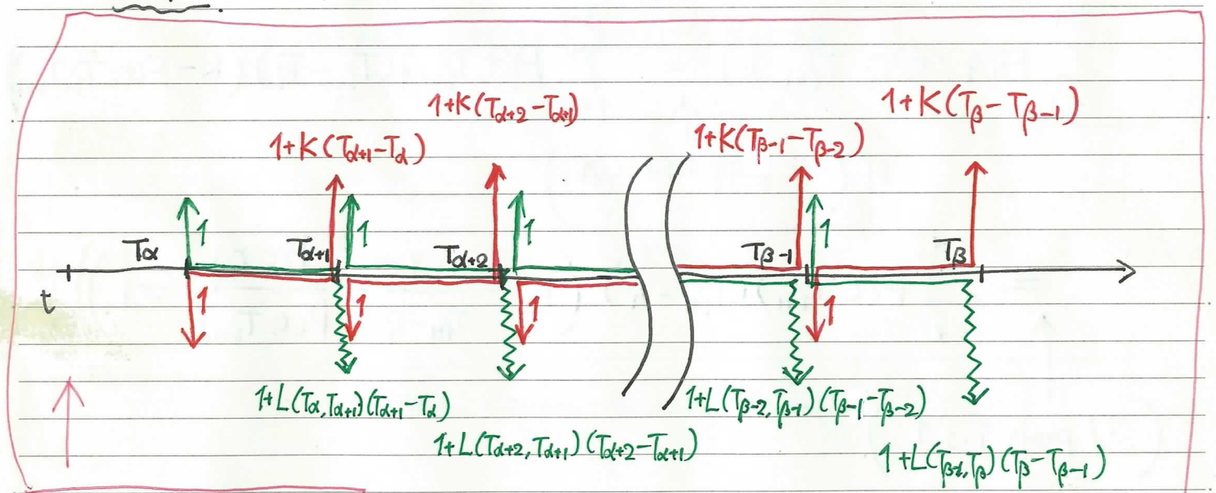
Fig. 1-4.1

↑ 収入.　↓ 支出.
〰 … 変動するもの.　‖ 固定されたもの.
} 図の描き方 (記号の意味).

用語

Payer IRS (‖ PFS) …	支払い	固定金利. (pay. fixed rate)
	受取り	浮動金利 (市場) (receive. floating rate)

Receiver IRS (‖ RFS)	pay.	floating
	receive.	fixed



Receiver IRS
RFS.

Fig. 1-4-2

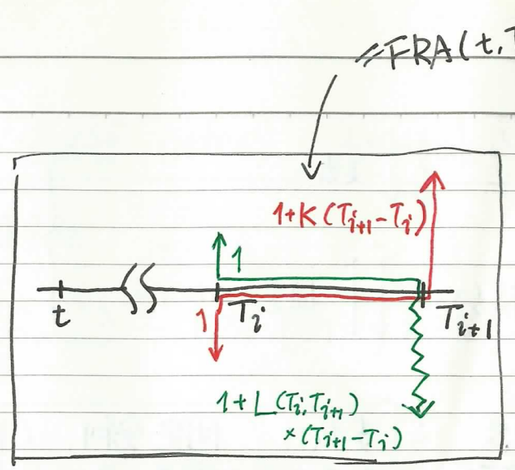
‖
RFS (t, τ K)　　↑ この RFS の価値 (時刻 $t \leq T_\alpha$ に於ける) を, RFS (t, τ, K) と記す.

where $\tau = \{T_\alpha, T_{\alpha+1}, \ldots, T_\beta\}$

同様に PFS (t, τ, K) も定義する。

この図より.

$$RFS(t,\mathcal{T},K) = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1}$$



$$= \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} FRA(t, T_i, T_{i+1}, K) \quad \text{-----} \quad ①$$

①の右辺を更に変形すると,

$$\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} FRA(t, T_i, T_{i+1}, K) = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} P(t, T_{i+1})(T_{i+1}-T_i)\left(K - F(t; T_i, T_{i+1})\right)$$

(∵ prop 1.3.1-Cor.)

$$= \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} P(t, T_{i+1})(T_{i+1}-T_i)\left(K - \frac{1}{T_{i+1}-T_i}\left(\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_{i+1})} - 1\right)\right)$$

(∵ prop 1.3.1)

$$= \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \left\{ KP(t,T_{i+1})(T_{i+1}-T_i) - \left(P(t,T_i) - P(t,T_{i+1})\right)\right\}$$

$$= \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} K(T_{i+1}-T_i)P(t,T_{i+1}) - \sum_{i=\alpha}^{\beta-1}\left(P(t,T_i) - P(t,T_{i+1})\right)$$

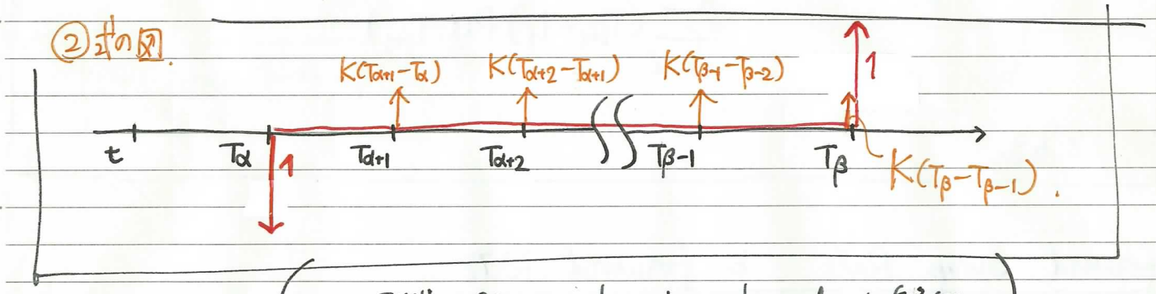
$$= \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} K(T_{i+1}-T_i)P(t,T_{i+1}) - P(t,T_\alpha) + P(t,T_\beta)$$

$$\Longleftrightarrow \quad RFS = -P(t,T_\alpha) + P(t,T_\beta) + K\sum_{i=\alpha}^{\beta-1}(T_{i+1}-T_i)P(t,T_{i+1}) \quad \text{---} \quad ②$$

①式… IRS は複数の(Kを同じとする)FRA の和に分解される事を示す。

②式… IRS は、利付債(coupon bearing bond)と割引債(zero coupon bond)の交換と見做される事を示す。
(又は、ある特別な利付債と見做す事が出来る事を示す、と言っても良い。)

②式の図.



(--- これは coupon bearing bond と等価.)

Forward Rate と同様にして、(c.f. def 1.3.1) swap rate (forward swap rate) を次の様に定義する:

Def 1.4.1 Forward Swap Rate

$\mathcal{T} = \{T_\alpha, T_{\alpha+1}, \cdots, T_\beta\}$ $\quad (T_i < T_{i+1}, \ \forall i)$

$t \leqslant T_\alpha$

に対し、$S_{\alpha,\beta}(t)$ は、$RFS(t, \mathcal{T}, S_{\alpha,\beta}(t)) = 0$

となる様な値であると定義し、これを forward swap rate (時刻 t での) と呼ぶ。

前頁②式より直ちに、

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t,T_\alpha) - P(t,T_\beta)}{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1}(T_{i+1}-T_i)P(t,T_{i+1})}$$

である。

forward Swap Rate と forward Rate

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t,T_\alpha) - P(t,T_\beta)}{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1}(T_{i+1}-T_i)P(t,T_{i+1})} \quad \cdots ③$$

ここで次の変形を考える:

$$\frac{P(t,T_k)}{P(t,T_\alpha)} = \frac{P(t,T_{\alpha+1})}{P(t,T_\alpha)} \cdot \frac{P(t,T_{\alpha+2})}{P(t,T_{\alpha+1})} \cdot \frac{P(t,T_{\alpha+3})}{P(t,T_{\alpha+2})} \cdots \cdot \frac{P(t,T_k)}{P(t,T_{k-1})}$$

$$= (※).$$

forward rate は prop 1.3.1 より、

$$F(t: T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{T_i - T_{i-1}}\left(\frac{P(t,T_{i-1})}{P(t,T_i)} - 1\right)$$

$$\Longleftrightarrow (T_i - T_{i-1})F(t: T_{i-1}, T_i) = \frac{P(t,T_{i-1})}{P(t,T_i)} - 1$$

$$(※) = \prod_{i=\alpha}^{k-1}\left\{1 + (T_{i+1}-T_i)F(t: T_i, T_{i+1})\right\}^{-1} \quad \forall k > \alpha$$

③と合わせて、

$$\Longrightarrow S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1 - \prod_{i=\alpha}^{\beta-1}\left(1 + (T_{i+1}-T_i)F(t: T_i, T_{i+1})\right)^{-1}}{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1}(T_{i+1}-T_i)\prod_{j=\alpha}^{i-1}\left(1 + (T_{j+1}-T_j)F(t: T_j, T_{j+1})\right)^{-1}}$$

(∵ ③の右辺の分子、分母に $P(t,T_\alpha)^{-1}$ を乗じる)

$\boxed{\text{prop 1-4-1}}$

1-5 : IR Cap/Floor, Swaption.

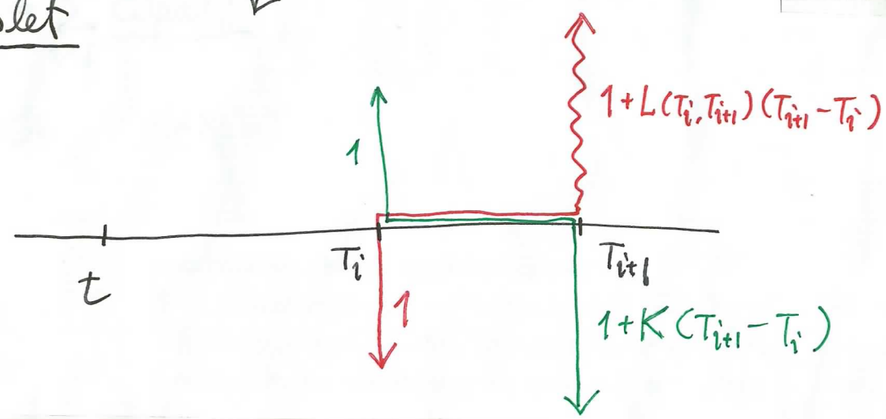
代表的な金利 option

IR Cap/Floor ··· 一般事業者が購入.
Swaption ---- 金融機関相手.

CAP/FLOOR

payer IRSの $[T_i, T_{i+1}]$ の部分

Caplet



Caplet $(K; T_i, T_{i+1})$ ····· $L(T_i, T_{i+1}) - K > 0$ の場合には.
上の取引が行なわれ, それ以外の場合,
(i.e. $L(T_i, T_{i+1}) - K \leq 0$) の場合には何も生じない,
という契約。(の価値).

Def 1.5.1

$\mathcal{T} = \{T_\alpha, T_{\alpha+1}, \cdots, T_\beta\}$ とする時

$$CAP(K; \mathcal{T}) := \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} Caplet(K; T_i, T_{i+1})$$

と定める.

← CAPの定義

(つまり. 各「支払い/受取り」単位が, その価値が正となる時にのみ実行される
ような Payer IRS を CAP と言う。)

何故これが CAP と呼ばれるのか:

市場から (当然市場金利, $\{L(T_i, T_{i+1})\}_{i=\alpha,\cdots,\beta}$ で). 資金を調達する
事を考える。
— $\{T_{\alpha+1}, \cdots, T_\beta\}$ の各時点で, $L(T_i, T_{i+1})(T_{i+1}-T_i)$
の金利を支払う事になる。(T_βに於ては. 額面 1. も払う。)

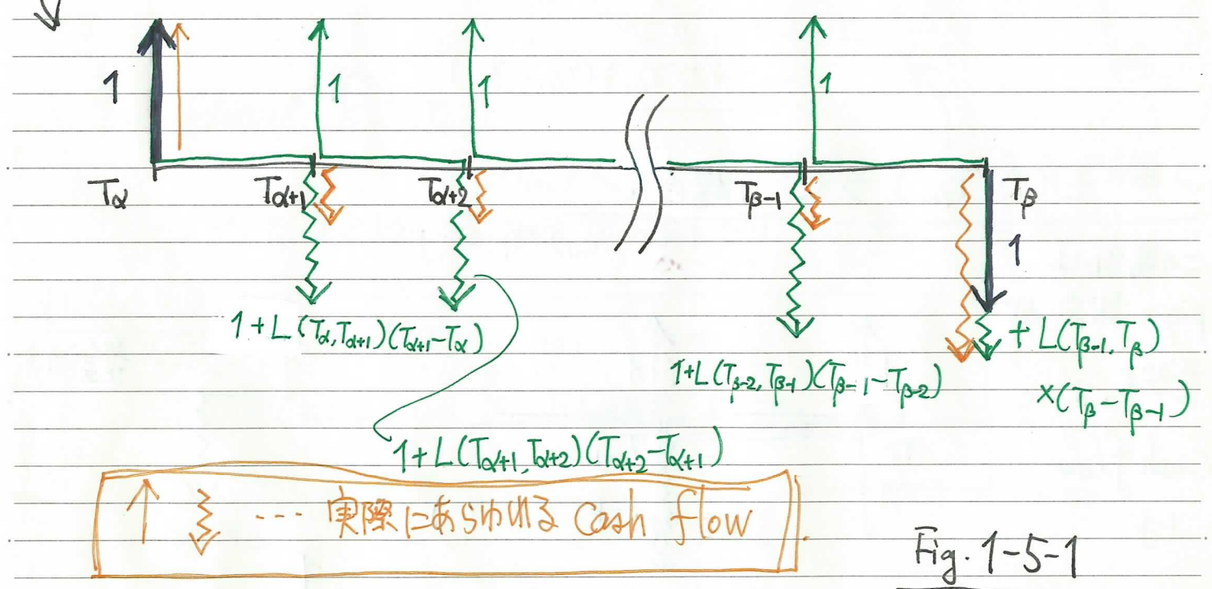


Fig. 1-5-1

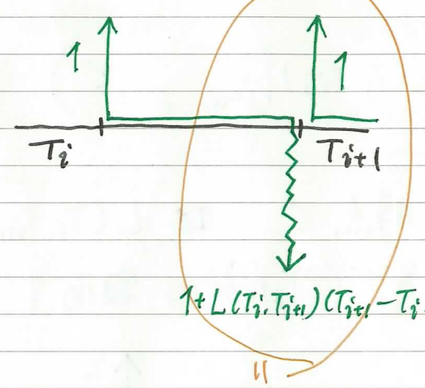
この時考えられる RISK ···· 市場金利の高騰
↑
この Risk を hedge したい. (≒ 回避したい.)

$\{T_i\}_{i=\alpha}^{\beta}$
$\parallel$

この時、Cap$(K;\tau)$ の契約を同時に行なうと、

◎ $L(T_i, T_{i+1}) \leqq K$ の場合：

何も変わらない。Cash flow は、

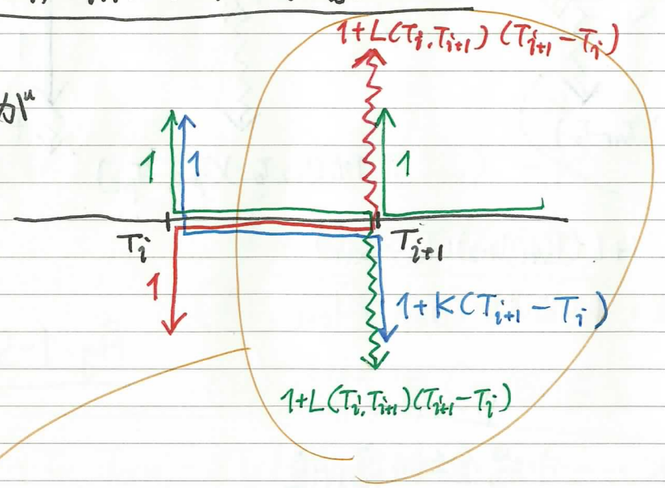


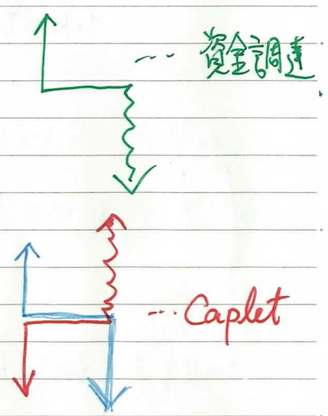
$\parallel$

$-L(T_i, T_{i+1})(T_{i+1}-T_i)$ である。

◎ $L(T_i, T_{i+1}) > K$ の場合：

この場合には payer IRS が発生し、Cash flow は





$-K(T_{i+1}-T_i)$ である。

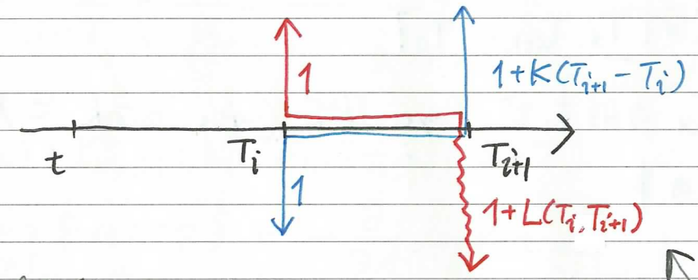
… つまり どんなに市場金利が上昇しても、最大 K を上回る金利払いは生じない。

⇒ 払い金利が上限 K で cap される。(caplet)

⇒ CAP と呼ぶ理由

FLOOR も同様に定義される。

floorlet　　receiver IRS の $[T_i, T_{i+1}]$ の部分



Floorlet$(K;T_i,T_{i+1})$

… $L(T_i, T_{i+1}) < K$ の場合に この取引が発生し、$L(T_i, T_{i+1}) \geqq K$ の場合には何も生じない、という契約（の価値）。

Def. 1.5.2

$\tau = \{T_\alpha, T_{\alpha+1}, \cdots, T_\beta\}$ に対し、

$$\mathrm{FLOOR}(K;\tau) := \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \mathrm{Floorlet}(K;T_i,T_{i+1})$$

と定める。　　FLOORの定義

Report. 問題 2

(1) Floor 契約は、どの様な RISK を避ける為に使われるか、

(2) 何故、この契約が Floor と呼ばれるのか、

を述べよ。

$\boxed{\text{SWAPTION}}$ ------ "SWAP 契約を underlying asset (原資産) とする option"

European Payer Swaption

with $\begin{cases} \text{strike rate } K. \\ \text{option maturity } T_\alpha. \\ \mathcal{T} = \{T_\alpha, T_{\alpha+1}, \cdots, T_\beta\} \end{cases}$ とは,

"時刻 T_α の時点で Payer IRS, $PFS(\mathcal{T}, K)$ に入る(契約する)権利" の事

↑

此の意味の説明は難かしい。(後述する).
(プロ同士で売買される商品なので…)

・CAP/FLOOR よりも重要.

⇓

vol2. P96 ∧
P92 ∧

> この option を long している者は,
$S_{\mathcal{T}}(T_\alpha) > K$ なら ~~権~~ 権利を行使
$\leq K$ なら 何もしない
という行動をとる 何故か?

まとめ.

$$P(t,T)\,(1+(T-t)L_{(t,T)}) = 1$$

$$P_{(t,T)}\, e^{(T-t)R_{(t,T)}} = 1.$$

$$\lim_{T \searrow t} R_{(t,T)} = \lim_{T \searrow t} L_{(t,T)} =: r(t)$$ --- short Rate

$$F(t:T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{P_{(t,T)}}{P_{(t,S)}} - 1\right)$$ ... simply compounded Forward Rate

$$FRA(t,T,S,K) = P_{(t,S)}\,(K - F(t:T,S))\,(S-T)$$

$$f(t,T) := \lim_{S \searrow T} F(t:T,S) = -\frac{\partial}{\partial S}\log P(t,S)\Big|_{S=T}$$

---- instantaneous Forward rate

$$f(t,t) = r(t)$$

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,du\right)$$ --- discount factor

$$D(t,T) := \exp\left(-\int_t^T r(u)\,du\right)$$ --- stochastic discount factor