

東京工業大学大学院 経営工学専攻

2014/5/9

年金数理第5回

年金数理の基礎

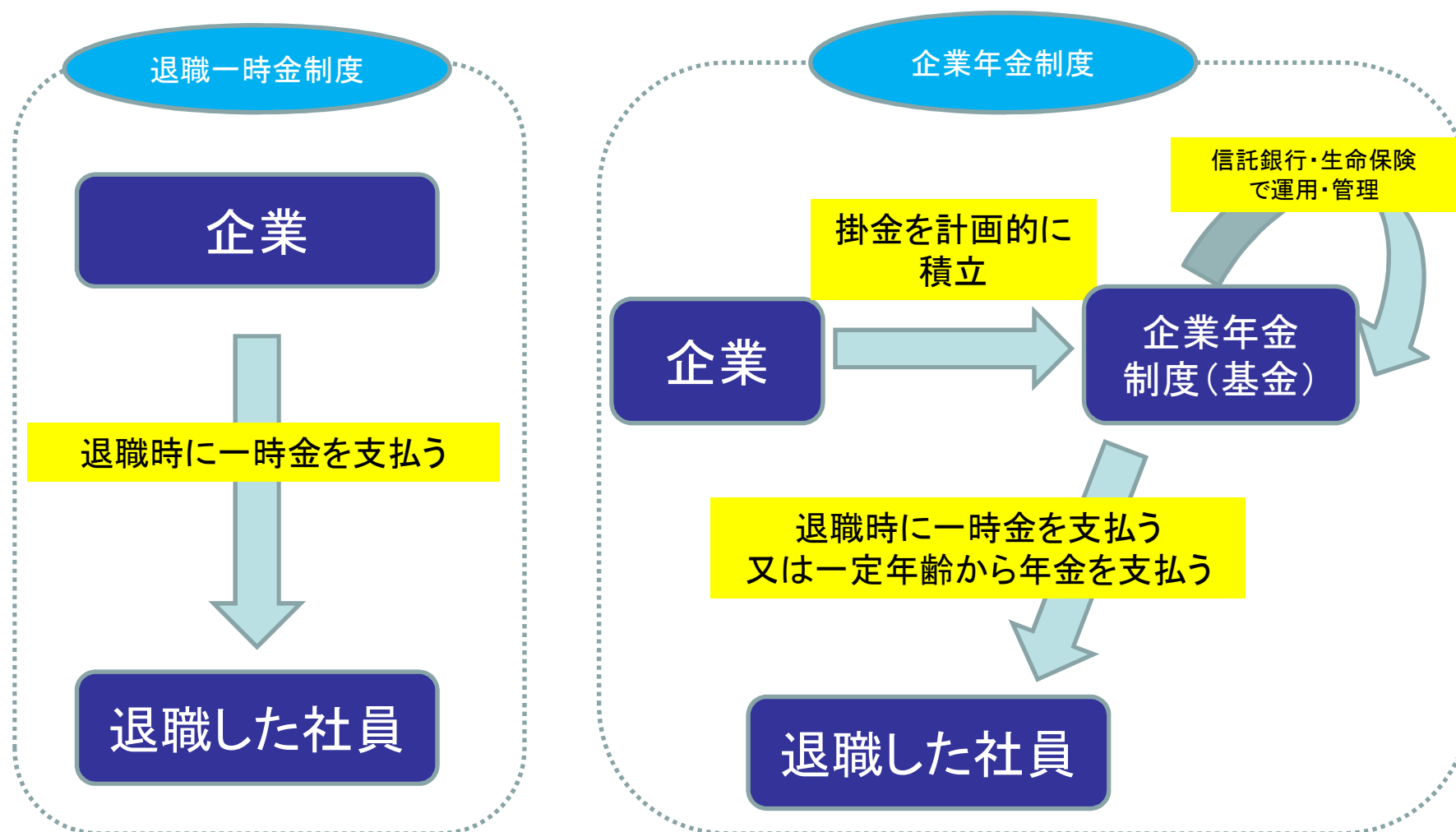
講師 : 渡部善平 ((株)IICパートナーズ)

第5回の目的

- 具体的な年金制度の例を知る
- 年金数理の目的と基本原理
- 年金数理の道具立て: 計算基礎率を知る
- 定常人口について理解する
- モデル企業・年金制度について理解する
- 等価の原理について理解する
- 現価・終価について理解する

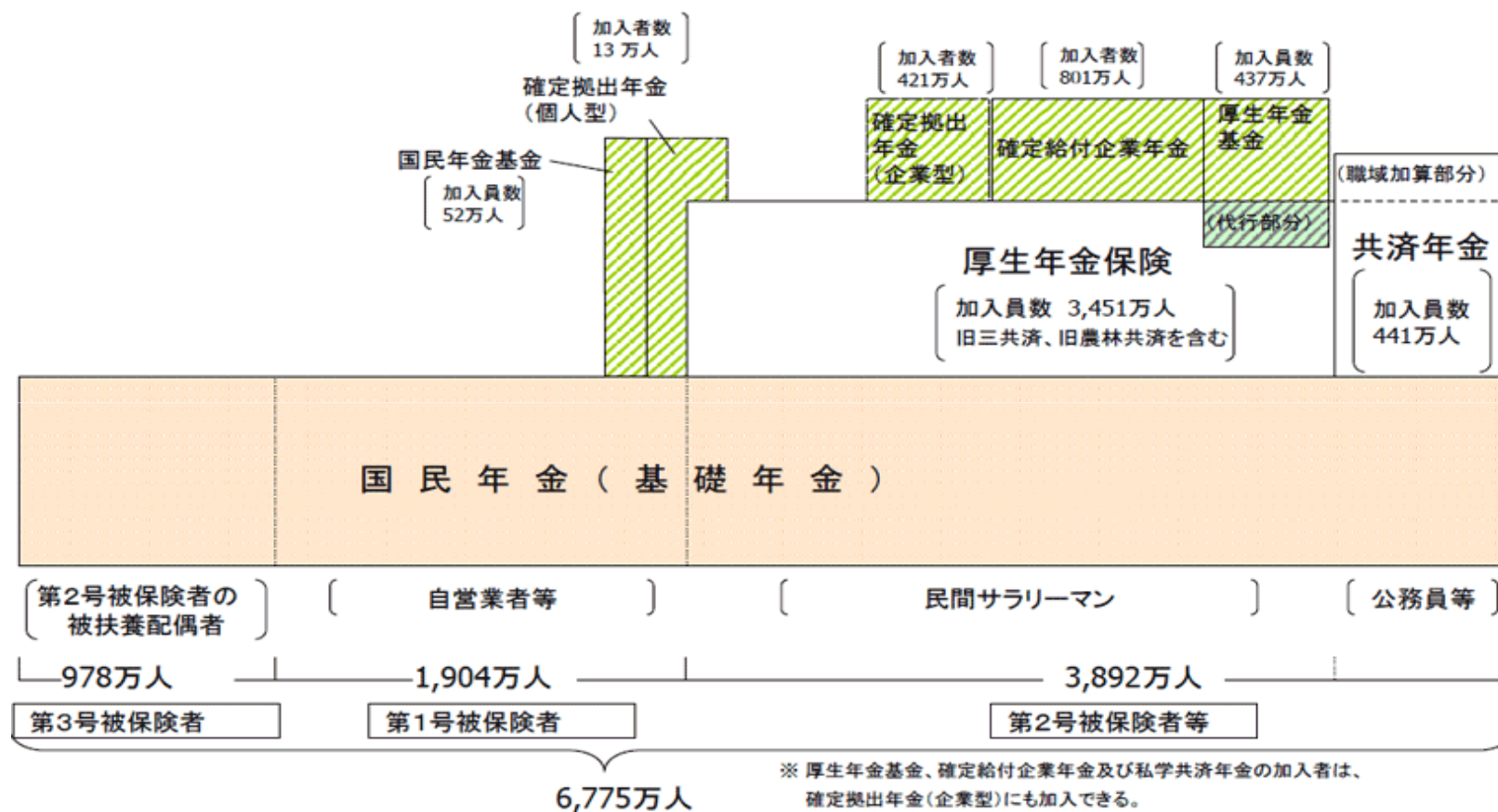
年金制度と年金数理

退職金制度と企業年金制度



年金制度の体系

(数値は、平成24年3月末)



※ 厚生年金基金、確定給付企業年金及び私学共済年金の加入者は、確定拠出年金(企業型)にも加入できる。
 ※ 国民年金基金の加入員は、確定拠出年金(個人型)にも加入できる。
 ※ 第2号被保険者等は、被用者年金被保険者のことをいう(第2号被保険者のほか、65歳以上で老齢又は退職を支給事由とする年金給付の受給権を有する者を含む。)
 ※ 合計値のずれは端数によるもの。

厚労省HPより

企業年金制度(1)

- 企業独自の年金制度 ……企業年金
 - わが国年金制度の中の「3階」部分
 - 企業の報酬制度の重要な構成要素
 - 従業員の退職(自己都合会社都合・死亡・定年)を要件として支払う
 - 給付算定式は各企業で決定
 - 年金財政は各企業内で完結
 - 通常、積立のための掛金(年金保険料)は通常企業負担で損金算入
 - 掛金は外部積立され、資本市場で運用される
 - 確定給付制度と確定拠出制度がある
(年金数理で扱うのは確定給付制度)

企業年金制度(2)

- 企業年金制度の典型的な給付算定式
 - 最終給与比例型
 - ・ 退職時給与 × 勤続年数別支給率
 - 平均給与比例型
 - ・ 全期間平均給与 × 勤続年数別支給率
 - ポイント制
 - ・ 退職時累計ポイント × 単価
 - キャッシュバランスプラン
 - ・ 給与の一定割合を規約で定めた利率(変動)とともに累計した額をもとに給付支払い

具体的な企業年金制度例(1)

■ 最終給与比例型

● 年金

- ・ 受給資格 : 勤続20年以上での退職
- ・ 年金月額 : 最終給与月額 $\times$ 別表2の給付率
- ・ 年金開始時 : 60歳、終身支給

● 一時金受給資格

- ・ 受給資格 : 勤続3年以上20年未満の退職
- ・ 一時金額 : 最終給与月額 $\times$ 別表1の給付率

具体的な企業年金制度例(2)

別表1

勤続年数	給付率
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	5.6
9	6.3
10	7.0
11	7.7
12	9.6
13	10.4
14	11.2
15	12.0
16	12.8
17	15.3
18	16.2
19	17.1
20	20.0

別表2

勤続年数	給付率
20	0.215
21	0.226
22	0.237
23	0.247
24	0.258
25	0.269
26	0.280
27	0.290
28	0.301
29	0.312
30	0.323
31	0.333
32	0.344
33	0.355
34	0.366
35	0.376
36	0.387
37	0.398
38	0.409
39	0.419
40	0.430
41	0.441
42	0.452

従業員構成例

年齢	勤続	人数	平均給与	年齢	勤続	人数	平均給与
20	0	50	200,000	40	20	41	297,300
21	1	49	204,000	41	21	91	303,200
22	2	30	208,100	42	22	67	309,300
23	3	67	212,300	43	23	45	315,500
24	4	78	216,500	44	24	47	321,800
25	5	56	220,800	45	25	62	328,200
26	6	70	225,200	46	26	83	334,800
27	7	61	229,700	47	27	79	341,500
28	8	54	234,300	48	28	50	348,300
29	9	45	239,000	49	29	18	355,300
30	10	86	243,800	50	30	8	362,400
31	11	80	248,700	51	31	36	369,600
32	12	51	253,700	52	32	25	377,000
33	13	61	258,800	53	33	15	384,500
34	14	57	264,000	54	34	18	392,200
35	15	82	269,300	55	35	19	400,000
36	16	82	274,700	56	36	26	408,000
37	17	76	280,200	57	37	30	416,200
38	18	91	285,800	58	38	19	424,500
39	19	41	291,500	59	39	16	433,000

年金数理の目的

- 掛金の決定

長期的に

掛金 + 運用収益 = 給付

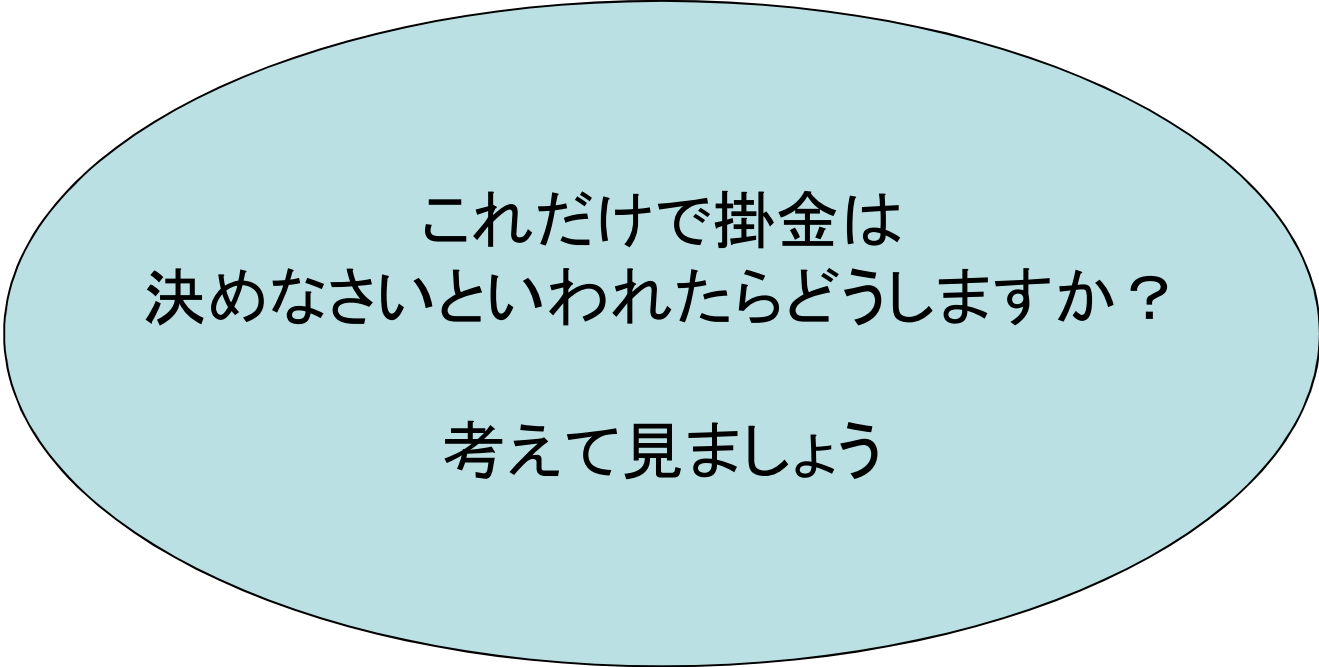
を実現するように掛金を決定する

- (なぜ運用収益か?)

積立てた掛金を、給付発生まで、年金資産としてプールし
資本市場(株・債券・預貯金等)で運用する

掛金: 会社が、将来の年金の給付のために、あらかじめ
積み立てる必要な経済的な備え

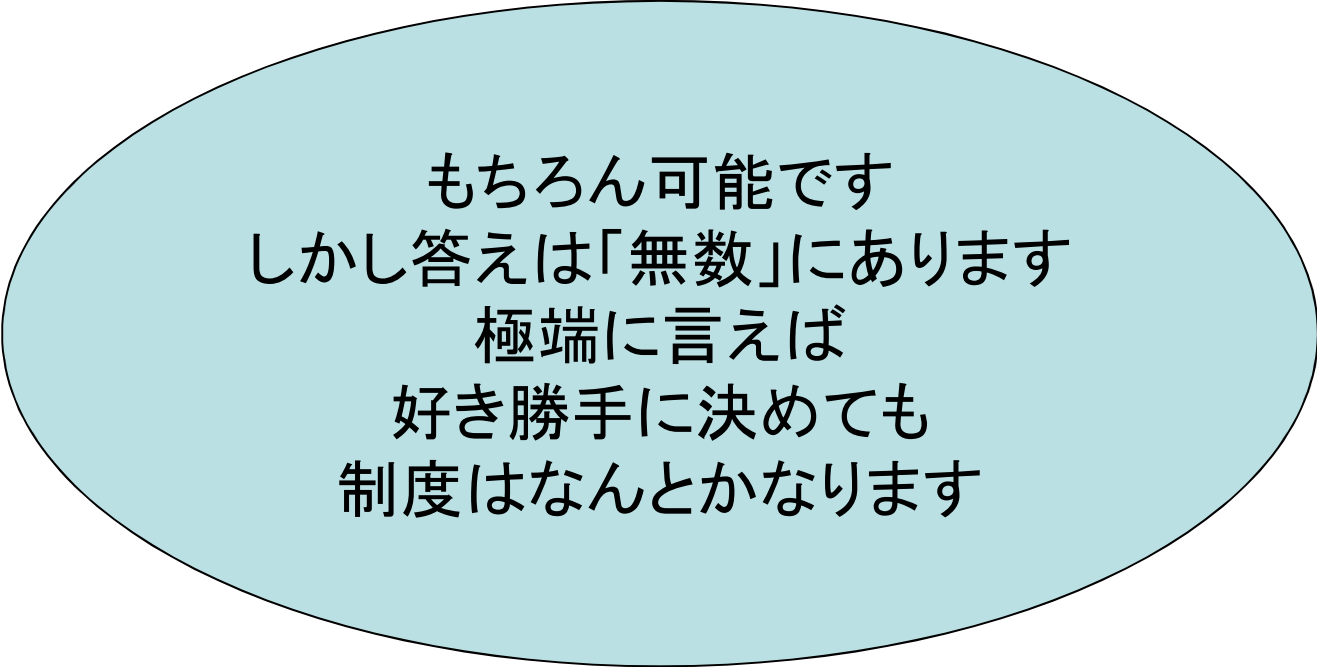
掛金を決定する際に必要な事項は？



これだけで掛金は
決めなさいといわれたらどうしますか？

考えてみましょう

掛金を決定する際に必要な事項は？



もちろん可能です
しかし答えは「無数」にあります
極端に言えば
好き勝手に決めても
制度はなんとかあります

年金数理の基本原則

- ・計算基礎率

掛金を決定する際に必要な事項は？

■ 大原則

- 収支相等の原理(これはどんな場合でも必要)
長期的に 掛金＋運用収益＝給付 を実現
- 加入者(従業員)毎でなく集団(企業)毎の収支相等
各人で見した場合の偏りは許容
- 非負の原理
積立金をマイナスにしない
- 大数の法則 : 一定以上の集団の規模
集団が大きくなるほど計算前提(基礎率)の有効が高まる
掛金が安定するための要件

掛金を決定する際に必要な事項は？

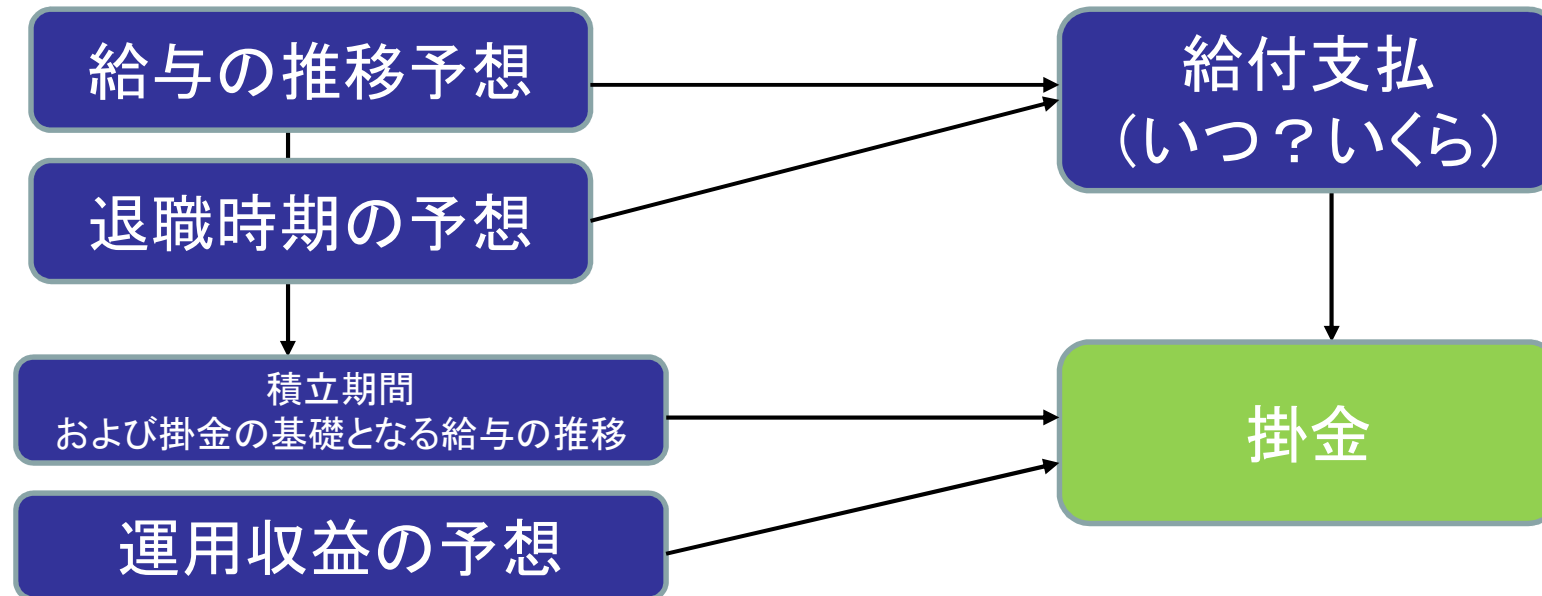
■ 積立の方針

- Ex 人数比例または給与比例で積み立てる
- Ex 多くは平準的な積立(掛金額/掛金率は一定)
- 積立の速度(掛金でまかなう部分と運用収益でまかなう部分の割合)

⇒ たとえば、各従業員の給与 $\times$ 一定率で積み立てたいとしたとき、掛金の算定にはどのような前提が必要か

収支相等の原則

長期的に
掛金 + 運用収益 = 給付
を実現するように掛金を決定する



⇒ 各種「計算基礎率」が必要になる

非常に単純な例

たとえば

- 現在 25歳 勤続5年
- 給与 300,000円

のような初期条件を与えられただけでは、掛金の計算に必要な給付の発生時期(退職時点)、給付額、積立期間(勤続期間)は特定できない。

掛金の計算に必要な情報	その情報を予測するのに必要なより基本的な情報
給付の発生時期(退職時期)	毎年の退職率
給付額	給付の発生時期 ← 毎年の退職率、 退職時の給与 ← 毎年の昇給率
積立期間(勤続期間)	毎年の退職率

あらかじめ前提をおかないと、
給付や積立の予想ができないことがわかる

計算基礎率

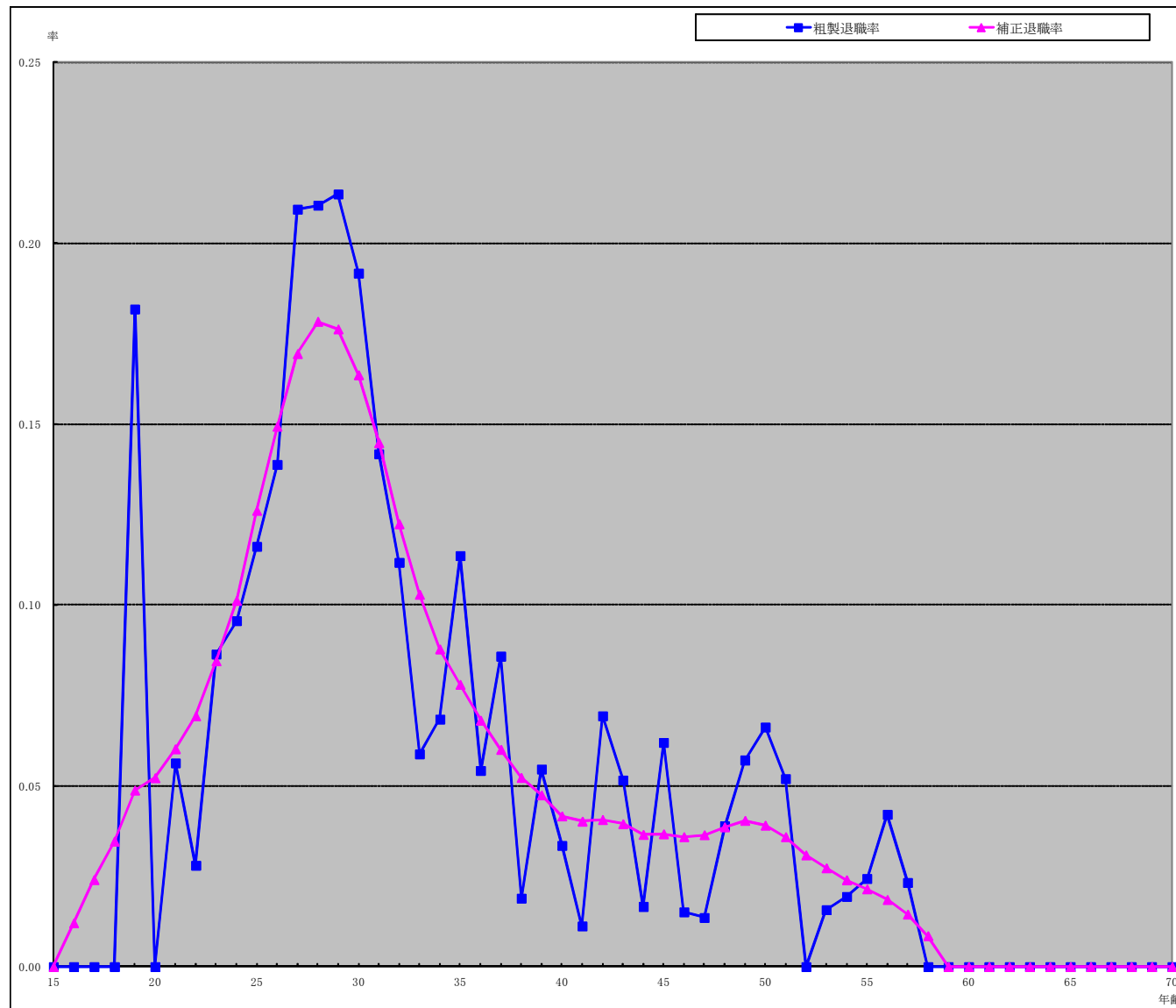
- 給付支払いの発生時期の予想
⇒ 予定脱退率
- 給付額の予想
⇒ 予定脱退率・予定昇給率
- 積み立ての基礎となる従業員数/給与額の予想
⇒ 予定脱退率・予定昇給率・予定新規加入員
- 運用収益の予想
⇒ 予定利率

予定脱退率

- 制度の加入者が、向こう1年間に退職する確率
- 通常、直近の実績に基づいて決定する
 - 年齢毎に決定する場合
 - 一律に決定する場合

自己都合退職率

年齢	グループ化		退職率	
	退職者	在籍者	粗製退職率	補正退職率
15	0.0	0.0	0.0000000	0.0000000
16	0.0	0.0	0.0000000	0.0121212
17	0.0	0.0	0.0000000	0.0240717
18	0.0	3.0	0.0000000	0.0347194
19	1.0	5.5	0.1818182	0.0488240
20	0.0	18.0	0.0000000	0.0522091
21	6.0	106.5	0.0563380	0.0602416
22	6.0	214.0	0.0280374	0.0693202
23	21.0	243.0	0.0864198	0.0845318
24	22.0	230.0	0.0956522	0.1012510
25	28.0	241.0	0.1161826	0.1261343
26	32.0	230.5	0.1388286	0.1493915
27	49.0	234.0	0.2094017	0.1694667
28	46.0	218.5	0.2105263	0.1783820
29	44.0	206.0	0.2135922	0.1762648
30	37.0	193.0	0.1917098	0.1636240
31	28.0	197.5	0.1417722	0.1448392
32	19.0	170.0	0.1117647	0.1224362
33	9.0	153.0	0.0588235	0.1029017
34	9.0	131.5	0.0684411	0.0878406
35	15.0	132.0	0.1136364	0.0780337
36	7.0	129.0	0.0542636	0.0681451
37	10.0	116.5	0.0858369	0.0600357
38	2.0	105.5	0.0189573	0.0523045
39	5.0	91.5	0.0546448	0.0474742
40	3.0	89.5	0.0335196	0.0416766
41	1.0	89.0	0.0112360	0.0402235
42	6.0	86.5	0.0693642	0.0406482
43	4.0	77.5	0.0516129	0.0395014
44	1.0	60.0	0.0166667	0.0365423
45	4.0	64.5	0.0620155	0.0367214
46	1.0	66.0	0.0151515	0.0359290
47	1.0	73.5	0.0136054	0.0364519
48	3.0	77.0	0.0389610	0.0386609
49	4.0	70.0	0.0571429	0.0404474
50	5.0	75.5	0.0662252	0.0391059
51	4.0	77.0	0.0519481	0.0359227
52	0.0	73.5	0.0000000	0.0308738
53	1.0	63.5	0.0157480	0.0272994
54	1.0	51.5	0.0194175	0.0240236
55	1.0	41.0	0.0243902	0.0214801
56	2.0	47.5	0.0421053	0.0185703
57	1.0	43.0	0.0232558	0.0145039
58	0.0	34.0	0.0000000	0.0085674
59	0.0	16.0	0.0000000	0.0000000
60			0.0000000	0.0000000
61			0.0000000	0.0000000
62			0.0000000	0.0000000
63			0.0000000	0.0000000
64			0.0000000	0.0000000
65			0.0000000	0.0000000
66			0.0000000	0.0000000
67			0.0000000	0.0000000
68			0.0000000	0.0000000
69			0.0000000	0.0000000
70			0.0000000	0.0000000

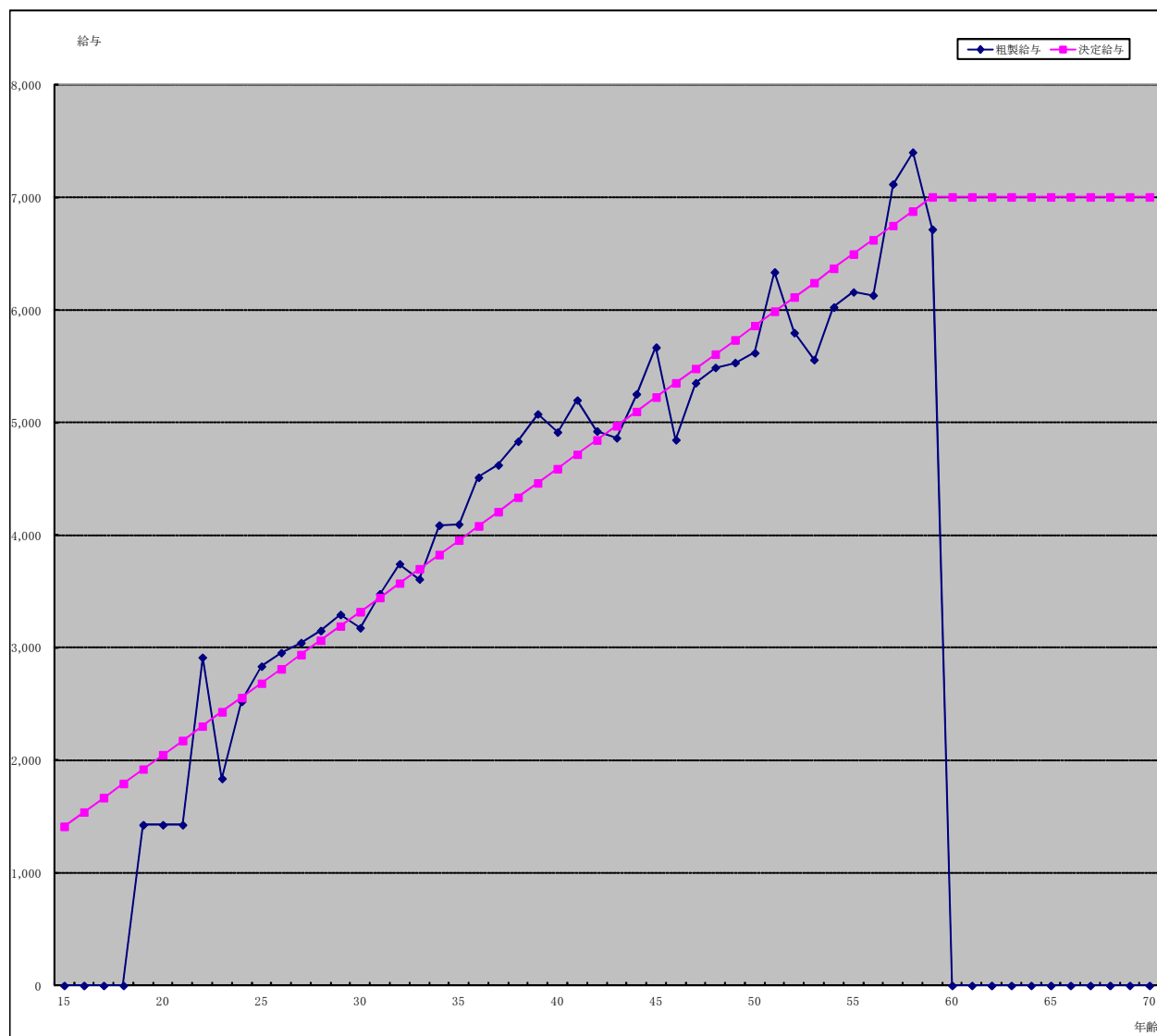


予定昇給率

- 制度の加入者の給与の向こう1年間の予想昇給率
- 通常、直近の実績に基づいて決定する
 - 年齢毎に決定する場合
 - 一律に決定する場合

予定昇給率計算の例

予定昇給指数リスト



年齢	人数	累計給与	粗製給与	決定給与	昇給指数
15	0	0	0	1,414	1.00000
16	0	0	0	1,541	1.08988
17	0	0	0	1,669	1.17976
18	0	0	0	1,796	1.26964
19	1	1,428	1,428	1,923	1.35952
20	1	1,428	1,428	2,050	1.44940
21	1	1,428	1,428	2,177	1.53928
22	2	5,832	2,916	2,304	1.62916
23	4	7,356	1,839	2,431	1.71904
24	3	7,572	2,524	2,558	1.80892
25	7	19,860	2,837	2,685	1.89880
26	9	26,616	2,957	2,813	1.98868
27	6	18,276	3,046	2,940	2.07856
28	17	53,604	3,153	3,067	2.16844
29	19	62,624	3,296	3,194	2.25832
30	27	85,818	3,178	3,321	2.34820
31	35	121,792	3,480	3,448	2.43808
32	23	86,173	3,747	3,575	2.52796
33	33	119,168	3,611	3,702	2.61784
34	28	114,516	4,090	3,829	2.70772
35	33	135,274	4,099	3,957	2.79760
36	43	194,158	4,515	4,084	2.88748
37	31	143,384	4,625	4,211	2.97736
38	53	256,283	4,836	4,338	3.06724
39	38	192,974	5,078	4,465	3.15712
40	52	255,710	4,918	4,592	3.24700
41	49	254,900	5,202	4,719	3.33688
42	34	167,492	4,926	4,846	3.42676
43	49	238,375	4,865	4,974	3.51664
44	43	226,007	5,256	5,101	3.60652
45	58	328,914	5,671	5,228	3.69640
46	64	310,314	4,849	5,355	3.78628
47	44	235,612	5,355	5,482	3.87616
48	59	323,963	5,491	5,609	3.96604
49	41	226,928	5,535	5,736	4.05592
50	52	292,316	5,621	5,863	4.14580
51	37	234,541	6,339	5,990	4.23568
52	32	185,610	5,800	6,118	4.32556
53	26	144,563	5,560	6,245	4.41544
54	21	126,567	6,027	6,372	4.50532
55	27	166,376	6,162	6,499	4.59520
56	20	122,672	6,134	6,626	4.68508
57	28	199,380	7,121	6,753	4.77496
58	17	125,878	7,405	6,880	4.86484
59	8	53,753	6,719	7,007	4.95472
60	0	0	0	7,007	4.95472
61	0	0	0	7,007	4.95472
62	0	0	0	7,007	4.95472
63	0	0	0	7,007	4.95472
64	0	0	0	7,007	4.95472
65	0	0	0	7,007	4.95472
66	0	0	0	7,007	4.95472
67	0	0	0	7,007	4.95472
68	0	0	0	7,007	4.95472
69	0	0	0	7,007	4.95472
70	0	0	0	7,007	4.95472

予定新規加入員に関する前提

- 制度に新規に加入（通常、企業に入社）する年齢・人数に関する仮定

（例）

年齢22歳で、毎年総人数の8%が加入する

予定利率

- 掛金の払い込みによって積み立てられた年金資産が資本市場で運用される場合に長期的に生み出す期待運用収益に関する仮定
- 通常は制度全体でひとつ

年金数理の目的(再び)

- 掛金の決定

長期的に

掛金 + 運用収益 = 給付

を実現するように掛金を決定する

- 財政の検証を行う

決定した掛金の妥当性の検証 = 計算基礎率の妥当性を見る

- 財政計画を定期的に見直す

必要に応じて掛金を変更する

= 計算基礎率を必要に応じて変更する

⇒ 年金受給者の受給権を保護する

定常人口・モデル的な制度

定常人口・モデル制度について

- これらを想定する意義
 - 年金数理の基礎理論＝財政方式の基礎理論を単純明快に導入し、理解しやすくするため
- 定常人口とは
 - その集団が予定計算基礎率どおりに推移した場合の究極的な人口構成
- この講義で中心的に考えるモデル制度とは
 - 定常人口を保った企業を想定
 - 給付内容：退職時の勤続年数に比例した年金額を定年年齢時より生存する限り支給する

定常人口

- 毎年一定の年齢で一定の人数が入社する
- 各年齢の従業員の集団では毎年一定の退職者が発生する
- 一定の定年年齢で全員退職する
- 定年年齢以降は、各年齢で毎年一定の死亡が発生する

定常人口

従業員

X	l_x	q_x
30	10,000	0.05
31	9,500	0.05
32	9,025	0.05
33	8,574	0.05
34	8,145	0.05
35	7,738	0.05
36	7,351	0.05
37	6,983	0.05
38	6,634	0.05
39	6,302	0.05
40	5,987	0.05
41	5,688	0.05
42	5,404	0.05
43	5,133	0.05
44	4,877	0.05
45	4,633	0.05
46	4,401	0.05
47	4,181	0.05
48	3,972	0.05
49	3,774	0.05
50	3,585	0.05
51	3,406	0.05
52	3,235	0.05
53	3,074	0.05
54	2,920	0.05
55	2,774	0.05
56	2,635	0.05
57	2,503	0.05
58	2,378	0.05
59	2,259	0.05

引退後

X	l_x	q_x
60	2,146	0.01
61	2,125	0.02
62	2,082	0.03
63	2,020	0.04
64	1,939	0.05
65	1,842	0.06
66	1,732	0.07
67	1,610	0.08
68	1,482	0.09
69	1,348	0.10
70	1,213	0.11
71	1,080	0.12
72	950	0.13
73	827	0.14
74	711	0.15
75	604	0.16
76	508	0.17
77	421	0.18
78	346	0.19
79	280	0.20
80	224	0.00

定常人口

t年度

X	l_x
30	10,000
31	9,500
32	9,025
33	8,574
34	8,145
35	7,738
36	7,351
37	6,983

t+1年度

X	l_x
30	10,000
31	9,500
32	9,025
33	8,574
34	8,145
35	7,738
36	7,351
37	6,983

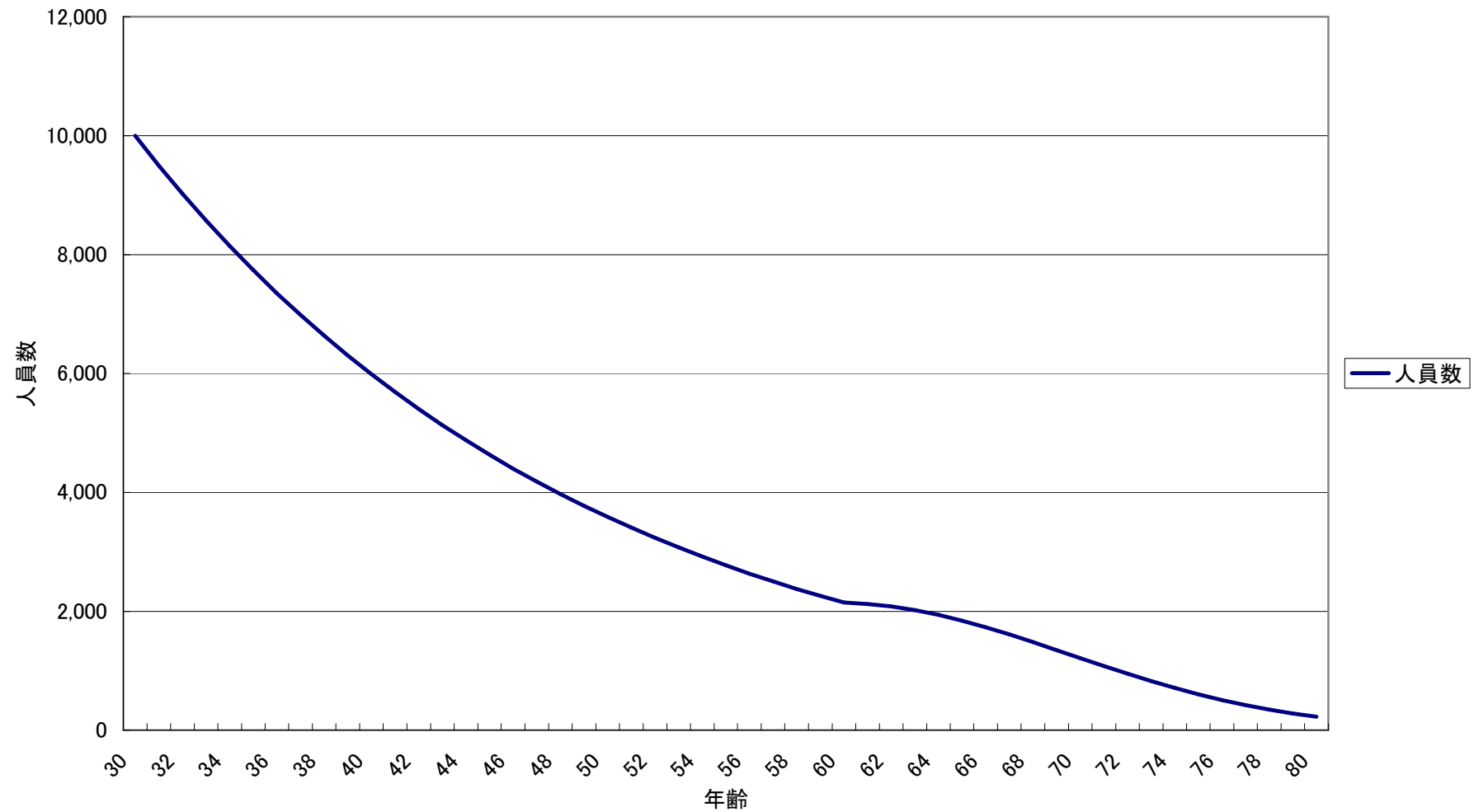
t+2年度

X	l_x
30	10,000
31	9,500
32	9,025
33	8,574
34	8,145
35	7,738
36	7,351
37	6,983

定常人口

定常人口

このグラフ
の形は不変



定常人口における諸記号

$$l_x$$

年齢 x 歳の人数

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

年齢 x 歳の1年間の退職(死亡)数

$$p_x = l_{x+1} / l_x$$

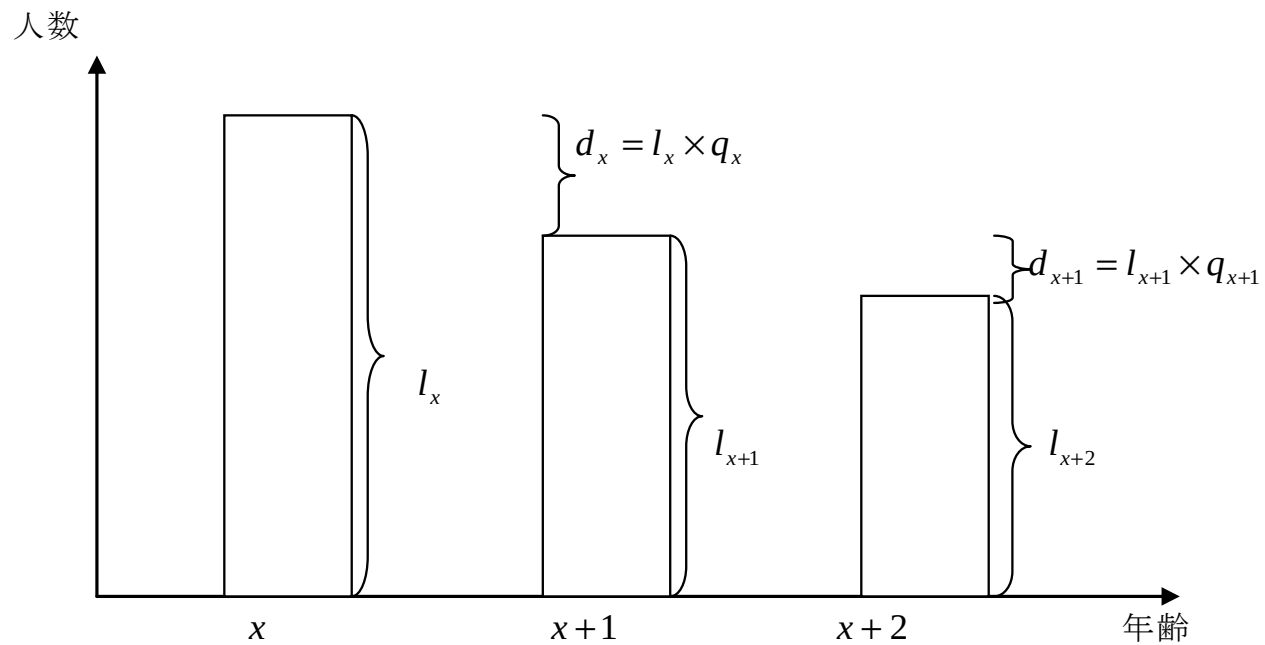
年齢 x 歳の残存率

$$q_x = d_x / l_x$$

年齢 x 歳の退職(死亡)率

$$\begin{aligned} p_x + q_x &= l_{x+1} / l_x + d_x / l_x = (l_{x+1} + d_x) / l_x \\ &= (l_{x+1} + l_x - l_{x+1}) / l_x = 1 \end{aligned}$$

記号の図による説明



定常人口における諸記号

$$\begin{aligned}
 {}_n p_x &= (1 - q_x)(1 - q_{x+1}) \cdots (1 - q_{x+n-1}) = \prod_{k=1}^n (1 - q_{x+k-1}) \\
 &= \prod_{k=1}^n (1 - q_{x+k-1}) = \prod_{k=1}^n p_{x+k-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x}
 \end{aligned}$$

現在 x 歳の者が n 年間残存する確率

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x \quad \text{現在}x\text{歳の者が}n\text{年間に退職(死亡)する確率}$$

$${}_{n|} q_x = {}_n p_x \cdot q_{x+n} \quad \text{現在}x\text{歳の者が}n+1\text{年目に退職(死亡)する確率}$$

演習

現在 x 歳の者が $n+1$ 年目に死亡する確率 ${}_n|q_x$

は、 $\frac{d_{x+n}}{l_x}$ になることを示せ。またつぎの生命表で

${}_{20}|q_{30}$ を求めよ。

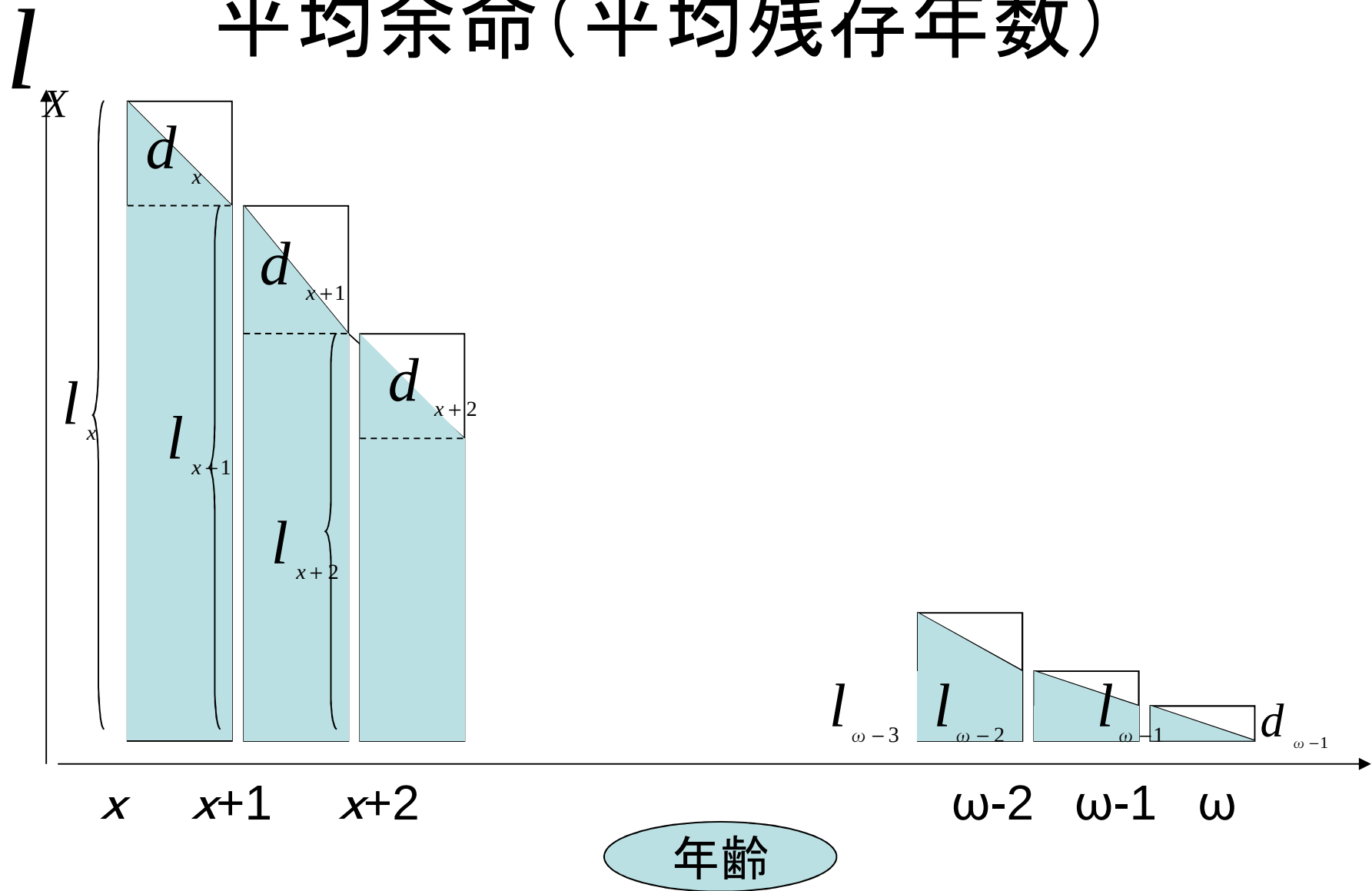
平均余命(平均残存年数)

平均余命(平均残存年数) ${}^{\circ}e_x$

x 歳の者 l_x 人の延べ生存期間

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}d_x + (1 + \frac{1}{2})d_{x+1} + (2 + \frac{1}{2})d_{x+2} + \cdots + ((\omega - x - 1) + \frac{1}{2})d_{\omega-1} \\ &= \frac{1}{2}(l_x - l_{x+1}) + (1 + \frac{1}{2})(l_{x+1} - l_{x+2}) + \cdots + ((\omega - x - 1) + \frac{1}{2})(l_{\omega-1} - l_{\omega}) \\ &= \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1}) + \frac{1}{2}(l_{x+1} + l_{x+2}) + \cdots + \frac{1}{2}l_{\omega-1} = \frac{1}{2}l_x + \sum_{t=1}^{\omega-x-1} l_{x+t} \end{aligned}$$

平均余命(平均残存年数)



平均余命(平均残存年数)

平均余命 ${}^{\circ}e_x$

$\frac{1}{2}l_x + \sum_{t=1}^{\omega-x-1} l_{x+t}$ を l_x で除して

$${}^{\circ}e_x = \left(\frac{1}{2}l_x + \sum_{t=1}^{\omega-x-1} l_{x+t} \right) / l_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega-x-1} l_{x+1}$$

定常人口とは

生命表の棒グラフが、経過年数によらず一定になる状態

一定の形/面積を保った、人口ピラミッドが実現していれば、 l_x の1年後の姿は l_{x+1}

$\frac{1}{2}l_x + \sum_{t=1}^{\omega-x-1} l_{x+t}$ は、延べ生存年数であると同時にx歳以降の総人数を表す.

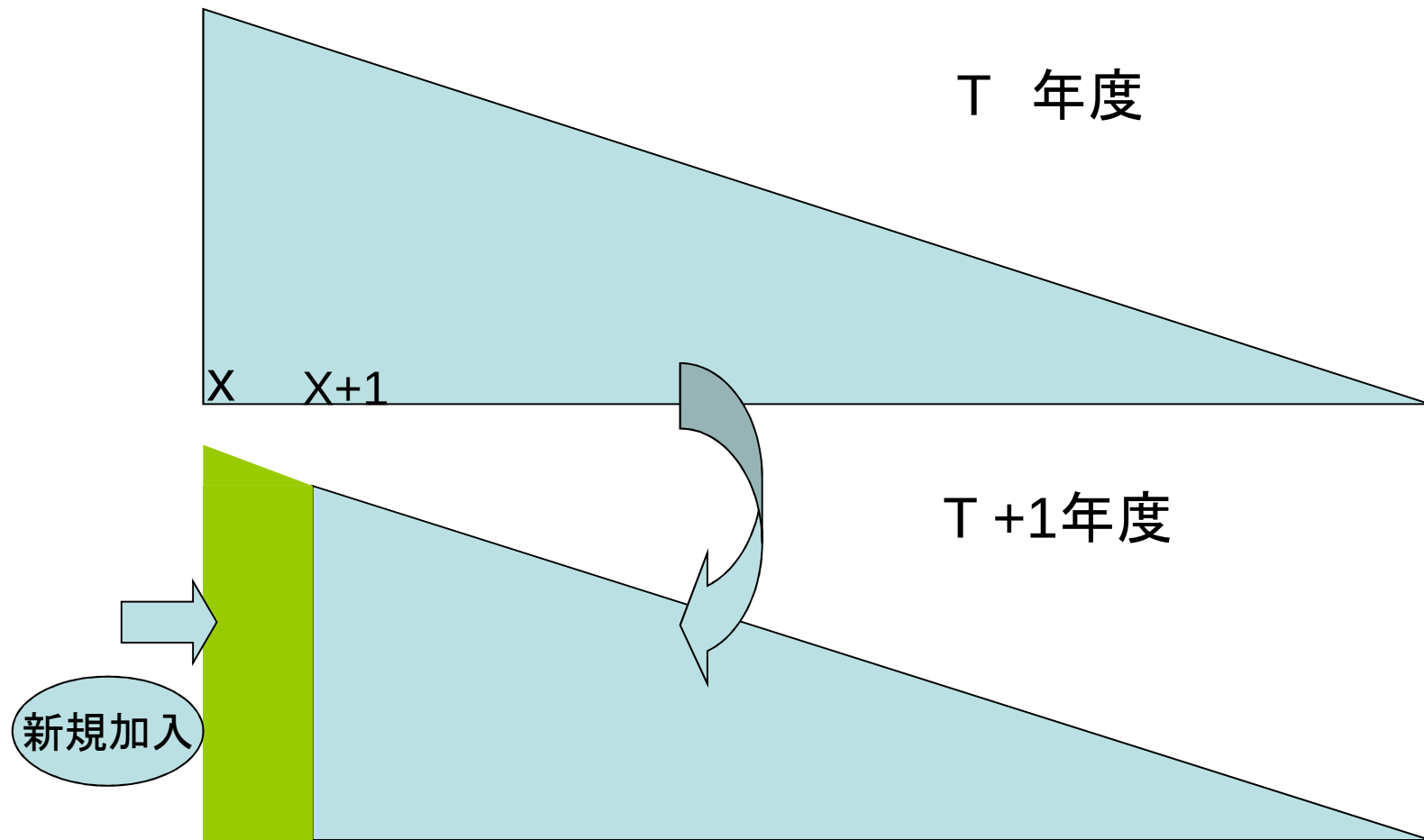
xをゼロとすれば、この全体数を一定に保つために、毎年.

l_0 人ずつ出生する必要がある..

すなわち全体の人数に対して e_0 の逆数倍出生することが必要

$$l_0 = \left(\frac{1}{2}l_0 + \sum_{t=1}^{\omega-1} l_t \right) \times \frac{l_0}{\frac{1}{2}l_0 + \sum_{t=1}^{\omega-1} l_t} = \left(\frac{1}{2}l_0 + \sum_{t=1}^{\omega-1} l_t \right) \times \frac{1}{e_0}$$

定常人口とは



金利計算・単利・複利

年金数理の大前提と金利計算

- 企業年金制度では(賦課方式の場合を除き)積立金が形成され、そこから得られる運用収益を見込んで財政計画が立てられる
- したがって、年金数理の計算では時間の経過に対応して利息が付利されることが前提となる
- 単位元本に対して1年間に生ずる利息を「年利率」(記号： i)という

単利と複利

【単利計算】 利息を元本に繰り入れない（再投資を行わない） 場合

$$P_n = P_0(1 + ni)$$

【複利計算】 毎年期初に利息を元本に繰り入れる場合

$$P_n = P_0(1 + i)^n$$

等価の原理・現価・終価

等価の原理とは

- たとえば、今10万円手にするのと、5年後に10万円手にするのと、どちらがうれしいか。なぜ？
- それでは、今10万円手にするのと、5年後に12万円手にするのと、どちらがうれしいか。なぜ？
- 今の10万円と、5年後のいくらが、同じ価値なのか？それを決定する要素は？

————→ 「終価」と「現価」の概念の導入が必要

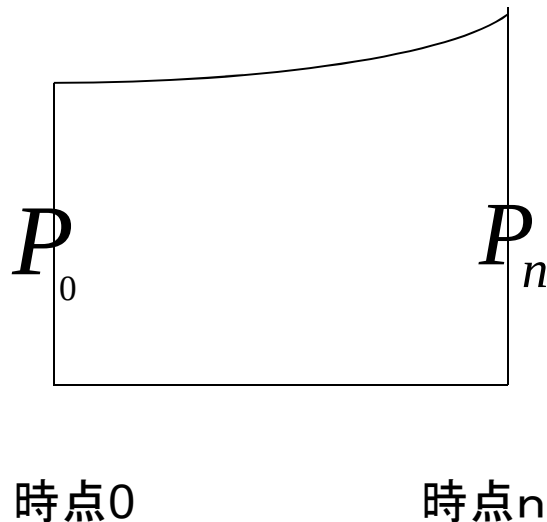
等価の原理とは

資産は(一定の年利率で複利で資産運用されていることを前提)

終価 : ある基準時点(n)より前の時点(0)の金額と等価な基準時点(n)の金額

現価 : ある基準時点(0)より後の時点(n)の金額と等価な基準時点(0)の金額

等価の原理 : 時点0の P_0 と時点nの P_n は等価



P_n は P_0 の終価、 P_0 は P_n の現価

終価率・現価率 : 利息と期間で決定

$$P_n = P_0 (1 + i)^n$$

$$P_0 = P_n \left(\frac{1}{1 + i} \right)^n = P_n v^n$$

ここに $v = \frac{1}{1+i}$ を割引率もしくは(複利)現価率という

等価の原理・終価・現価の実例

■ 終価

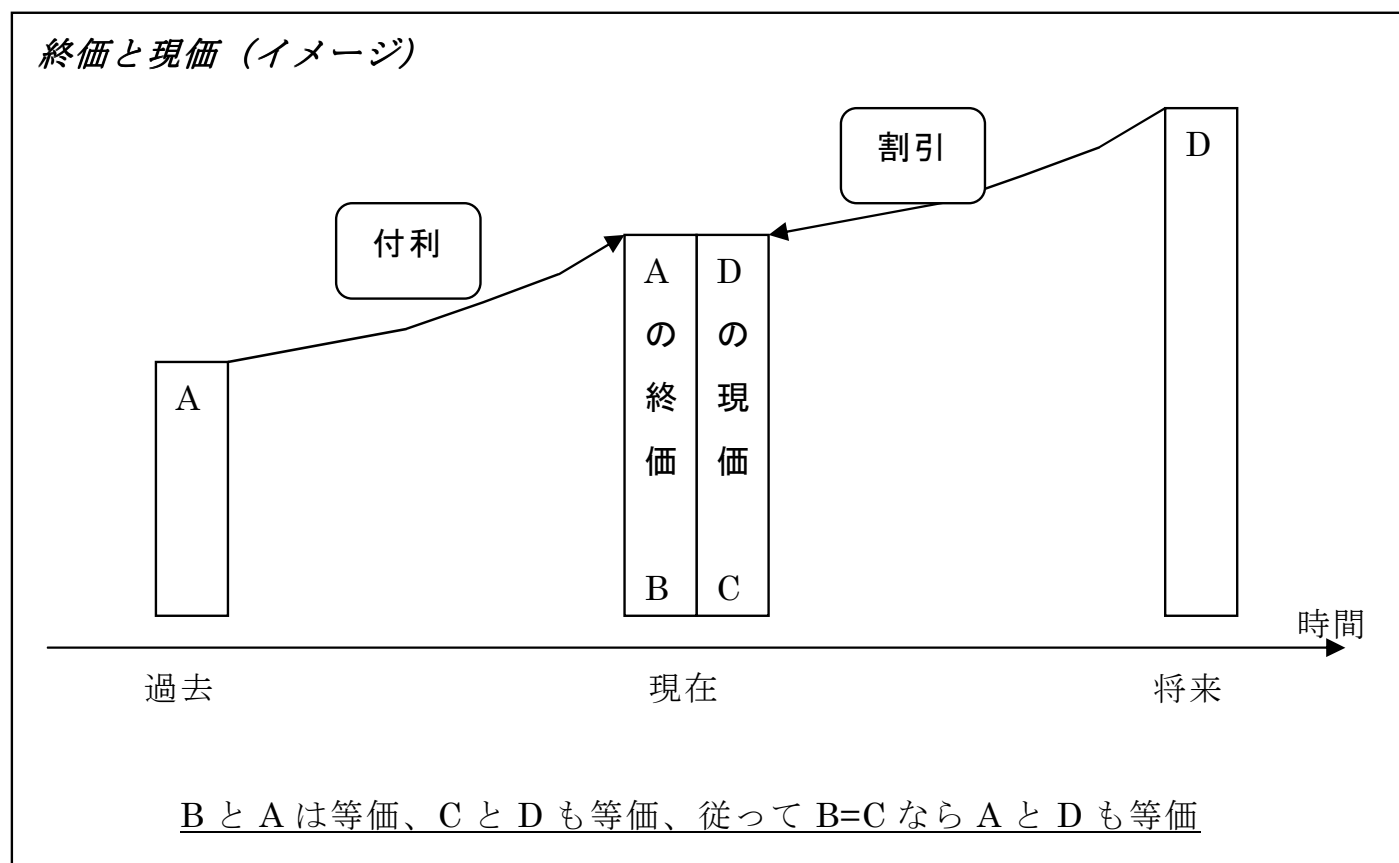
- 2010年4月1日の金額: 100,000円
- 利率2%で運用
- 2015年4月1日における「2010年4月1日の100,000円」に対する終価は？(演習)以後、特段の断りない限り、複利で考える。

■ 現価

- 2015年4月1日の金額: 110,408円
- 利率2%で運用
- 2010年4月1日における「2015年4月1日の110,408円」に対する現価は？(演習)

- 2010年4月1日の 円と、2015年4月1日の 円は等価

等価の原理は「相対的」「組み合わせ可能」



質問(講義の内容およびアクチュアリーの件でもOK) は
つぎのメールアドレスおよび電話へ

株式会社IICパートナーズ

渡部 善平

z.watanabe@iicp.co.jp

電話 : 03-5501-3795(直通)