基礎物理学演習VI(奥川)No.4

2014.6.5,12

【1】《線積分》
(i) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (x, 0)$ であるとき，2 つの経路 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ に沿った線積分

$$W_1 = \int_{\mathrm{C}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad W_2 = \int_{\mathrm{C}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1}$$

を計算せよ．ただし
$\mathrm{C}_1 : (0,0) \Rightarrow (1,1)$ の直線.
$\mathrm{C}_2 : (0,0) \Rightarrow (1,0) \Rightarrow (1,1)$ の折れ線.
(ii) (i) の $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の代わりに $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = (y, 0)$ として，2 つの経路 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ に沿った線積分

$$W_1' = \int_{\mathrm{C}_1} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad W_2' = \int_{\mathrm{C}_2} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{2}$$

を計算せよ．経路の $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ は (i) と同じものである.
(※) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = (0, y)$ の間違いではない，念のため.
(iii) 次の $\mathrm{C}_3 : y = x^2$ に沿って $(0,0) \Rightarrow (1,1)$ なる経路を考える。$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を経路 C_3 に沿って線積分せよ。
(iv) (i) から (iii) の結果を見て当然気づくべき重要なことは何か.

【2】《線積分》
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (x, 0, 0)$ であるとき，2 つの経路 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ に沿った線積分

$$W_1 = \int_{\mathrm{C}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad W_2 = \int_{\mathrm{C}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1}$$

を求めよ．ただし
$C_1 : (1,0,0)$ から xy 平面上の単位円周に沿って反時計回りで $(0,1,0)$ へ.
$C_2 : (1,0,0)$ から xy 平面上の単位円周に沿って時計回りで $(0,1,0)$ へ.
(※) $x = \cos\theta, y = \sin\theta$ として、パラメータ表示をするとよい.

【3】《角運動量》
(i) 質点 m の位置ベクトルが $\boldsymbol{r}$ であるとき，速度 $\boldsymbol{v}$，運動量 $\boldsymbol{p}$，加速度 $\boldsymbol{a}$ はそれぞれどのように表されるか.
(ii) 角運動量 $\boldsymbol{L}$ はどのように表されるか.
(iii) 元の原点から見て位置ベクトルが $\boldsymbol{b}$ (時間によらない) の点をあらたに原点とした．新しい座標系での位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'$，速度を $\boldsymbol{v}'$，運動量を $\boldsymbol{p}'$，加速度を $\boldsymbol{a}'$ とするとき，それらは元の座標系での $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{a}$ とそれぞれどのような関係にあるか.
(iv) 新しい座標系での角運動量を $\boldsymbol{L}'$ とするとき，それは元の座標系での $\boldsymbol{L}$ とどのような関係にあるか.
(v) (i)〜(iv) の答を見て，問題の作者は何に注意して欲しいのか，推察せよ.

【4】《レビ・チビタ記号とベクトル解析》
(i) 以下の $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$ の証明には間違いがある。どこが間違っているか、指摘せよ。（試験の際、多くの人が間違える典型例です。）

$$
\begin{aligned}
&\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\\
&=(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_i\\
&=\varepsilon_{ijk}A_j(\vec{B}\times\vec{C})_k\\
&=\varepsilon_{ijk}A_j(\varepsilon_{klm}B_lC_m)\\
&=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}A_jB_lC_m=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}A_jB_lC_m\\
&=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_jB_lC_m\\
&=A_jB_iC_j-A_jB_jC_i=A_jC_jB_i-A_jB_jC_i\\
&=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}_i-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}_i\\
&=((\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C})_i\\
&=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}
\end{aligned}
$$

(ii) $\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=0$ という式を証明することを考えます。講義では、大きな構造から手を付けていくという説明をしました。つまり、$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=A_i(\vec{A}\times\vec{B})_i=A_i\varepsilon_{ijk}A_jB_k=\varepsilon_{ijk}A_iA_jB_k=0$ とします。ここでわざと小さな構造、つまり、$(\vec{A}\times\vec{B})$ をレビ・チビタ記号で表現することからはじめて、証明をしてみてください。