平成 26 年度　理工系基礎科目「線形代数学第一」

正則行列であるための条件について

与えられた正方行列に対し, その逆行列はいつでも存在するとは限らない. つまり, 正方行列は必ずしも正則行列であるとは限らない. ここでは, 正方行列が正則行列であるための条件について考察しよう.

A, B, X, Y を n 次正方行列とする. I を n 次単位行列とする.

定義 1　X が A の**逆行列**であるとは, $AX = I$ かつ $XA = I$ が成り立つことである. A の逆行列が存在するとき, A は**正則行列**である (または単に**正則**である) という. $\diamond$

定義 1 で重要なのは「$AX = I$ かつ $XA = I$」という部分である. 2 つの等式の両方が成り立たなくてはならないのである. 例えば, 次の定理が簡単に導かれる.

定理 2　A の逆行列は, 存在するとすれば唯一つしかない.

証明　X, Y がどちらも A の逆行列であるとする. このとき,

$$X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y$$

が成り立つ ($XA = I$ と $AY = I$ を用いた！). $\square$

定義 1 より, A が正則行列であることを示すには, 2 つの条件 $AX = I$, $XA = I$ をみたす X が存在することを示す必要がある. ところが, 次の定理が知られている.

定理 3　$AX = I$ が成り立つならば, $XA = I$ も成り立つ.

定理 3 の証明は, 上の定理 2 の証明ほど簡単ではない. 例えば, 次のような証明法が知られている.

❶ 任意の行列が階段行列に変形できることを用いる証明
❷ 正方行列の積の行列式に関する性質を用いる証明

以下では, ❶の方法で定理 3 を証明してみよう. まず, 次の定理を示す.

定理 4　$AX = I$ であるとき, A のすべての行ベクトルは零ベクトルでない.

証明　$A = [a_{ij}]$, $X = [x_{ij}]$ とし, $AX = I$ であるとする. 今, A の第 ℓ 行が零ベクトルであると仮定しよう. すなわち, 任意の $j\,(1 \leqq j \leqq n)$ に対し $a_{\ell j} = 0$ であるとする. このとき, AX の (ℓ, ℓ) 成分は, 行列の積の定義より

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\ell k} x_{k\ell} = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot x_{k\ell} = 0$$

と計算される．一方, $AX = I$ であるから, AX の (ℓ, ℓ) 成分は 1 でなければならない．これは矛盾である．よって, A のすべての行ベクトルは零ベクトルでない．□

さらに, 次の定理を示す．

定理 5　B が階段行列であり, B のすべての行ベクトルが零ベクトルでないならば, $B = I$ である．

証明　$B = [b_{ij}]$ とし, B の第 i 行を $\mathbf{b}'_i = [b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in}]$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とする．B が階段行列であるから, 次の (1), (2), (3) が成り立つ．

(1) ある $k\,(1 \leqq k \leqq n)$ に対し, $\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_k \neq \mathbf{o}$ かつ $\mathbf{b}'_{k+1} = \cdots = \mathbf{b}'_n = \mathbf{o}$ である．

(2) 各 $i\,(1 \leqq i \leqq k)$ に対し, $\mathbf{b}'_i$ の最も左にある 0 でない数は 1 であり, その数が $\mathbf{b}'_i$ の第 q_i 成分であるとすると, $q_1 < q_2 < \cdots < q_k$ が成り立つ．

(3) 各 $i\,(1 \leqq i \leqq k)$ に対し, B の第 q_i 列は基本ベクトル $\mathbf{e}_i$ である．

さて, B の行ベクトルはどれも零ベクトルではない, つまり $\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n \neq \mathbf{o}$ であるから, (1) において $k = n$ となる．すると, (2) より $q_1 < q_2 < \cdots < q_n$ となるが, $1 \leqq q_1, q_2, \ldots, q_n \leqq n$ であるから, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $\ldots$, $q_n = n$ となるほかはない．よって, (3) より B の第 i 列 $(1 \leqq i \leqq n)$ は基本ベクトル $\mathbf{e}_i$ となり, $B = I$ となる．□

次の定理は講義中に詳しく解説した．

定理 6 (階段行列への変形定理)
(1) 任意の行列 A は行基本変形をくり返すことにより階段行列 B に変形できる．
(2) (1) の A, B に対し, $B = PA$ をみたす正則行列 P が存在する．

証明　教科書の定理 2.2 とその証明 (25〜27 ページ) を参照せよ．□

以上の準備のもとで, 定理 3 の証明を行う．

定理 3 の証明　n 次正方行列 A, X に対し, $AX = I$ が成り立つとしよう．定理 6 より, $B = PA$ をみたす n 次正方行列 B, P が存在する．ただし, B は階段行列であり, P は正則行列である．P の逆行列を P^{-1} とするとき,

$$B(XP^{-1}) = (PA)(XP^{-1}) = ((PA)X)P^{-1} = (P(AX))P^{-1} = (PI)P^{-1} = PP^{-1} = I$$

となるので, 定理 4 より B のすべての行ベクトルは零ベクトルでない．従って, 定理 5 より $B = I$ である．上の式にこれを代入すると, $XP^{-1} = I$ となる．この式の両辺に右から P をかけると, $X = P$ となる．ゆえに, $XA = PA = B = I$ となる．□

以上で見たように, 定理 3 は階段行列への変形定理 (定理 6) を用いて証明されるので, 自明な定理ではない．定理 3 は便利な定理であるが, 逆行列の定義はあくまでも定義 1 であることをしっかりと認識しておきたい．