平成 26 年度　理工系基礎科目「線形代数学第一」

積の行列式・転置の行列式

講義中に詳しい解説を与えなかった, 2 つの正方行列の積の行列式と, 正方行列の転置行列の行列式について解説する. 教科書 60〜62 ページにも解説があるが, より丁寧な説明を行う.

I を n 次単位行列とし, $P_i(c)$, $P_{ij}(c)$, P_{ij} を n 次基本行列とする (教科書 23 ページ).

補題 A　基本行列に対し, $|P_i(c)| = c$, $|P_{ij}(c)| = 1$, $|P_{ij}| = -1$ が成り立つ.

証明　$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ を n 次基本ベクトル (列ベクトル) とし, 行ベクトル ${}^t\mathbf{e}_1, {}^t\mathbf{e}_2, \ldots, {}^t\mathbf{e}_n$ を考える. このとき, 定理 3.2(2) より

$$|P_i(c)| = \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ c\,{}^t\mathbf{e}_i \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n \end{vmatrix} \overset{c^{-1}r_i}{=} c \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_i \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n \end{vmatrix} = c\,|I| = c \cdot 1 = c$$

となる. また, 定理 3.5 より

$$|P_{ij}(c)| = \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_i + c\,{}^t\mathbf{e}_j \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_j \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n \end{vmatrix} \overset{r_i - c\,r_j}{=} \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_i \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_j \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n \end{vmatrix} = |I| = 1$$

となる. さらに, 定理 3.3 より

$$|P_{ij}| = \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_j \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_i \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n \end{vmatrix} \overset{r_i \leftrightarrow r_j}{=} - \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_i \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_j \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n \end{vmatrix} = -|I| = -1$$

となる. □

補題 A から次の補題 B が導かれる.

補題 B　P を n 次 <u>基本行列</u>, A を n 次正方行列とするとき, $|PA| = |P||A|$ が成り立つ.

証明　P がそれぞれ $P_i(c)$, $P_{ij}(c)$, P_{ij} に等しい場合に, $|PA| = |P||A|$ を確かめればよい. A の第 i 行を $\mathbf{a}'_i$ とする. 教科書 16 ページの (1), 定理 3.2(2), 定理 3.5, 定理 3.3, 補題 A より

$$
|P_i(c)A| = \left|\begin{bmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ c\,{}^t\mathbf{e}_i \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n \end{bmatrix} A\right| = \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 A \\ \vdots \\ c\,{}^t\mathbf{e}_i A \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ c\,\mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{vmatrix} \overset{c^{-1}r_i}{=} c \begin{vmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{vmatrix} = c|A| = |P_i(c)||A|
$$

$$
|P_{ij}(c)A| = \left|\begin{bmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_i + c\,{}^t\mathbf{e}_j \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_j \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n \end{bmatrix} A\right| = \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 A \\ \vdots \\ ({}^t\mathbf{e}_i + c\,{}^t\mathbf{e}_j)A \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_j A \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 A \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_i A + c\,{}^t\mathbf{e}_j A \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_j A \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n A \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i + c\,\mathbf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{vmatrix} \overset{r_i - c r_j}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{vmatrix} = |A| = 1 \cdot |A| = |P_{ij}(c)||A|
$$

$$
|P_{ij}A| = \left|\begin{bmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_j \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_i \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n \end{bmatrix} A\right| = \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 A \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_j A \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_i A \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{e}_n A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{vmatrix} \overset{r_i \leftrightarrow r_j}{=} - \begin{vmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{vmatrix} = -|A| = |P_{ij}||A|
$$

となる. □

さらに, 補題 B から補題 3.7 が導かれる.

補題 3.7　P を n 次 <u>正則行列</u>, A を n 次正方行列とするとき, $|PA| = |P||A|$ が成り立つ.

証明　定理 2.7 より, 正則行列 P はいくつかの基本行列 $P_1, P_2, \ldots, P_r$ の積として $P = P_1P_2\cdots P_r$ と表される. 補題 B を繰り返し用いると

$$\begin{aligned} |PA| &= |(P_1P_2\cdots P_r)A| = |P_1(P_2\cdots P_rA)| = |P_1||P_2\cdots P_rA| \\ &= \cdots\cdots = |P_1||P_2|\cdots|P_r||A| \qquad \cdots\cdots\ (*) \end{aligned}$$

となる. 一方, $(*)$ に $A = I$ を代入すると $|PI| = |P_1||P_2|\cdots|P_r||I|$ となるが, $PI = P$ であり, $|I| = 1$ であるから

$$|P| = |P_1||P_2|\cdots|P_r| \qquad \cdots\cdots\ (**)$$

となる. よって, $(*)$, $(**)$ から $|PA| = |P||A|$ となる. □

2 つの正方行列の積の行列式について, 次の定理が成り立つ.

定理 3.8　A, B を n 次 <u>正方行列</u> とするとき, $|AB| = |A||B|$ が成り立つ.

証明　A が正則行列である場合とそうでない場合に分けて考える.

❶ A が正則行列であるとき: 補題 3.7 にほかならない.

❷ A が正則行列でないとき: 定理 2.2 より, A は, n 次正則行列 P と n 次階段行列 C によって $A = PC$ と表される. A が正則行列ではないので, 定理 2.6 より $\operatorname{rank} A < n$ である. すなわち, 階段行列 C の第 n 行は零ベクトル $\mathbf{o}$ である. すると, 行列の積の定義から CB の第 n 行も $\mathbf{o}$ である. よって, 定理 3.4(1) より, $|C| = 0$ かつ $|CB| = 0$ となる. このとき, 補題 3.7 より

$$|AB| = |(P^{-1}C)B| = |P^{-1}(CB)| = |P^{-1}||CB| = |P^{-1}| \cdot 0 = 0$$

となる. さらに, 補題 3.7 より

$$|A| = |P^{-1}C| = |P^{-1}||C| = |P^{-1}| \cdot 0 = 0$$

となり, $|A||B| = 0 \cdot |B| = 0$ となる. ゆえに, $|AB| = 0 = |A||B|$ である. □

注意　定理 3.8 の証明の❷の部分には「A が正則行列でないならば, $|A| = 0$ である」という事実の証明が含まれている. ◇

以上が積の行列式に関する考察である. 次に, 転置の行列式について考える.

補題 3.10　P を n 次 <u>基本行列</u> とするとき, $|{}^tP| = |P|$ が成り立つ.

証明　P がそれぞれ $P_i(c)$, $P_{ij}(c)$, P_{ij} に等しい場合に, $|{}^tP| = |P|$ を確かめればよい. 基本行列の形から, ${}^tP_i(c) = P_i(c)$, ${}^tP_{ij}(c) = P_{ji}(c)$, ${}^tP_{ij} = P_{ij}$ である. よって,

$|{}^tP_i(c)| = |P_i(c)|$, $|{}^tP_{ij}| = |P_{ij}|$ である．また, 補題 A より $|{}^tP_{ij}(c)| = |P_{ji}(c)| = 1 = |P_{ij}(c)|$ である．□

正方行列の転置行列の行列式について, 次の定理が成り立つ.

定理 3.11　A を n 次 <u>正方行列</u> とするとき, $|{}^tA| = |A|$ が成り立つ.

証明　A が正則行列である場合とそうでない場合に分けて考える.

❶ A が正則行列であるとき: 定理 2.7 より, A はいくつかの基本行列 $P_1, P_2, \ldots, P_r$ の積として $A = P_1P_2\cdots P_r$ と表される．このとき, 定理 1.1(4), 定理 3.8, 補題 3.10 を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}|{}^tA| &= |{}^t(P_1P_2\cdots P_r)| = |{}^tP_r\cdots{}^tP_2{}^tP_1| = |{}^tP_r|\cdots|{}^tP_2||{}^tP_1| = |P_r|\cdots|P_2||P_1| \\ &= |P_1||P_2|\cdots|P_r| = |P_1P_2\cdots P_r| = |A|\end{aligned}$$

となる.

❷ A が正則行列でないとき: 定理 1.2(3) より, ${}^tA$ も正則行列でない．よって, 定理 3.9 (もしくは, 上に述べた注意) より, $|{}^tA| = 0 = |A|$ となる．□

注意　定理 3.11 の重要性は, 行に関する行列式の性質 (定理 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6) から, 列に関する行列式の性質 (定理 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16) を導く点にある．◇