# 線型代数学第一　中間試験　　解答と解説

1.　$A$, $B$ を $n$ 次正方行列とする．$A$, $B$ がともに上三角行列ならば, $AB$ も上三角行列であることを示せ.

**解答例**　$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $AB = [c_{ij}]$ とする．行列の積の定義から, 任意の $i, j$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ に対し

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

である．ここで, $i > j$ であるとする．$k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ に対し,

❶ $i > k$ ならば, $A$ が上三角行列であることから $a_{ik} = 0$ となり,

❷ $k > j$ ならば, $B$ が上三角行列であることから $b_{kj} = 0$ となる.

$i > j$ であるから, $k$ に対して❶, ❷の少なくとも一方は必ず成り立つ．よって,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0$$

である．すなわち, $AB$ は上三角行列である．□

**解説・講評**　問題 1 は上三角行列の積に関する証明問題です．5 点満点で採点しました．うまく証明した人とそうでない人との差がついた問題でした．上三角行列であるための条件を式を用いて表せるかどうか, 行列の積の成分を式を用いて表せるかどうか, という 2 つの点が正解と不正解の分かれ目だったようです．大きな $n \times n$ 行列を 3 つ書いて, 与えられた命題を証明したとしている答案が少なからずありましたが, そのような解答は 1 点としました．また, 上三角行列と下三角行列を逆に覚えている人もいました．一方, 帰納法を用いた鮮やかな証明をした人も数人いました．少し気になったのは, 上三角行列の対角成分および対角成分よりも上側の成分が 0 ではないと思っている人が多かったことです．上三角行列とは, 対角成分よりも下側の成分が 0 である行列のことであり, それ以外の成分が 0 でない必要はありません．例えば, 零行列は上三角行列です．注意しましょう.

2.　$A$ を $n$ 次正方行列とするとき, 次の (1), (2) が成り立つことを示せ.

(1)　$A^2 = A$ かつ $A \neq I$ ならば, $A$ は正則行列でない.

(2)　$A^n = I$ となる自然数 $n$ が存在するならば, $A$ は正則行列である.

**解答例**　(1) 背理法によって証明する．$A$ が正則行列であると仮定する．つまり, $A$ の逆行列 $A^{-1}$ が存在するとする．このとき, $A^2 = A$ より

$$A = IA = (A^{-1}A)A = A^{-1}(AA) = A^{-1}A^2 = A^{-1}A = I$$

となる．これは $A \neq I$ に矛盾する．ゆえに, $A$ は正則行列ではない.

(2) $n=1$ のとき, $A=I$ であるから $A$ は正則行列である ($I$ の逆行列は $I$ 自身である). $n \geqq 2$ とする. このとき,

$$AA^{n-1} = A^{n-1}A = A^n = I$$

であるから, $A^{n-1}$ は $A$ の逆行列である. よって, $A$ は正則行列である. □

**解説・講評**　問題 2 は正則行列に関する証明問題です. (1) を 3 点, (2) を 3 点とし, 6 点満点で採点しました. (1) はとてもよくできていました. 解答例のように背理法を用いた証明がほとんどでしたが, 行列式をうまく用いた証明もありました. (2) もよくできていましたが, (1) よりは難しい問題だったようです. 解答例のような答案が大多数でした. 条件 $A^n = I$ を $(A-I)(A^{n-1}+\cdots+A+I)=O$ と書き換え, そこから $A-I=O$ または $A^{n-1}+\cdots+A+I=O$ であると述べている答案がいくつかありました. 行列の場合は零因子を考える必要がありますから, この議論は誤りです. また, $n$ に関する帰納法を用いた答案もありましたが, 帰納法の仮定と示すべき命題の仮定を混同しているものが多かったようです.

3.　次の行列 $A$ について, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

(1)　行基本変形を繰り返すことにより, $A$ を階段行列 $B$ に変形せよ.

(2)　(1) の結果から, $A$ の階数を答えよ.

**解答例**　(1) 第 1 行の $-1, -2, -2$ 倍をそれぞれ第 2 行, 第 3 行, 第 4 行に加えると

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

となる. 第 2 行の $-1$ 倍をそれぞれ第 1 行, 第 4 行に加え, 第 3 行を $-1$ 倍すると

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

となる. 第 3 行の $-2, 1$ 倍をそれぞれ第 1 行, 第 4 行に加えると

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots \quad (\text{答え})$$

となる．これが求める階段行列 $B$ である．

(2) (1) より, 階段行列 $B$ の零ベクトルでない行の数は 3 である．従って,

$$\operatorname{rank} A = \mathbf{3} \quad \cdots\cdots \quad (\text{答え})$$

である．□

**解説・講評**　問題 3 は与えられた行列の階段行列と階数を求める問題です．(1) を 4 点, (2) を 2 点とし, 6 点満点で採点しました．よくできていました．行基本変形に関しては, 多くの人が計算の過程を詳しく説明していて, よい答案が多かったように思います．(1) の途中で計算を間違えた人にも, 階段行列の条件 (1), (2) (教科書 25 ページ) をみたす行列にまで変形していれば部分点 (2 点) を出しました．その場合は階数もすぐにわかりますので, (2) も採点しました．一方, 階段行列の条件 (1), (2) をみたす行列を正しく求めていない答案は, (1), (2) とも 0 点にしました．正しくない行列は正しい答えの論拠にはなりえないからです．

4.　次の連立 1 次方程式が解をもつための実数 $a$ についての条件を求め, そのときの解を求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 10x_4 = -15 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = a \end{cases}$$

**解答例**　与えられた連立 1 次方程式の拡大係数行列を求め, 第 1 行の $-2, 1$ 倍をそれぞれと第 2 行, 第 3 行に加えると

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & -6 \\ 2 & 4 & -5 & -10 & -15 \\ -1 & -2 & 4 & 2 & a \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & a-6 \end{array}\right]$$

となる．第 2 行の $3, -1$ 倍をそれぞれ第 1 行, 第 3 行に加えると

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right]$$

となる．連立 1 次方程式が解をもつための必要十分条件は, 拡大係数行列の階数と係数行列の階数が等しいことである．上の階段行列の形から, $a = 3$ のとき, またこのときに限り, 拡大係数行列の階数と係数行列の階数はいずれも 2 となり等しい．よって, 求める条件は

$$\boldsymbol{a = 3} \quad \cdots\cdots \quad (\text{答え})$$

である. $a=3$ のとき, 上の階段行列から定まる連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_1+2x_2-10x_4=-15 \\ x_3-2x_4=-3 \end{cases}$$

であるから, 求める解は

$$x_1=\boldsymbol{-2c_1+10c_2-15},\ x_2=\boldsymbol{c_1},\ x_3=\boldsymbol{2c_2-3},\ x_4=\boldsymbol{c_2} \quad \cdots \quad (\text{答え})$$

(ただし, $c_1, c_2$ は任意の定数) となる. □

**解説・講評**　問題 4 は未知の定数を含む連立 1 次方程式の解を求める問題です. 拡大係数行列の行基本変形に 3 点, 解の存在条件 $a=3$ を正しく求めて 2 点, $a=3$ のときの解の表示を正しく求めて 3 点とし, 8 点満点で採点しました. とてもよくできていました. 拡大係数行列の行基本変形は, 行列の階数がすぐに読み取れる形に変形してあればよいことにしました. 一方, 解の存在条件については,「連立 1 次方程式が解をもつための必要十分条件は $a=3$ である」と明確に書いていないものには点を与えませんでした.「$a\neq 3$ のときは解が存在しない」ことをチェックしていないと見なせるからです. 拡大係数行列の階数について場合分けを行っている丁寧な解答もありました. 解の表示のしかたはたくさんありますが, 階段行列の第 1 列と第 3 列が基本ベクトルになっているので, $x_1$ と $x_3$ を他の変数で表す方法が良い表示と言えるでしょう.

**満点**　**25** 点

**配点**　第 1 問：**5** 点　第 2 問：**6** 点　第 3 問：**6** 点　第 4 問：**8** 点