微分積分学第一 宿題の解答例（7 月 24 日出題分)

問題 5.4 (教科書 133 ページ)

4. (3) $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq a\}$ とする。$z = x^2 + y^2$ より $z_x = 2x$, $z_y = 2y$ であるから、

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$$

となる。よって求める曲面積を S とすると、(途中極座標変換を用いて)、

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a}} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{\pi}{6}\{(1 + 4a)^{\frac{3}{2}} - 1\}. \end{aligned}$$

(4) $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ とする。$z = xy$ より $z_x = y$, $z_y = x$ であるから、求める曲面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} \sqrt{1 + r^2}\, r\, dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{3}(1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{a} = \frac{2\pi}{3}\{(1 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 1\}. \end{aligned}$$

(5) 与えられた曲面は z 軸の周りの回転で不変である。そこで $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと、回転放物面は $z = \frac{1}{2}(r^2 - 1)$, 半径 2 の球面は $r^2 + z^2 = 4$ と表される。これらから $r = \sqrt{3}$ を得る。つまり 2 つの曲面の交わりは円 $x^2 + y^2 = 3$ である。よって $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 3\}$ とおくと、与えられた曲面は

$$\{(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}) \,|\, (x, y) \in D\}$$

と表される。球面上では $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ より

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

なので

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

となる。したがって求める曲面積を S とすれば

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_D \frac{2dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}} = 2\cdot 2\pi \left[-\sqrt{4-r^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = 4\pi.
\end{aligned}
$$

5. (2) $f(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ のとき

$$
f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})
$$

となるから、

$$
1 + f'(x)^2 = \frac{1}{4}(e^{x/a} + e^{-x/a})^2 \quad \therefore \sqrt{1+f'(x)^2} = \frac{1}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}).
$$

よって回転体の表面積の公式から、求める面積を S とすると、与えられた曲線は y 軸での折り返しで不変になっていることに注意して,

$$
\begin{aligned}
S &= 2\cdot 2\pi \int_0^a \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) \cdot \frac{1}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})\, dx \\
&= \pi a \int_0^a (e^{x/a} + e^{-x/a})^2\, dx \\
&= \cdots = \pi a^2 (\frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + 2).
\end{aligned}
$$