微分積分学第一 宿題の解答例（7 月 17 日出題分)

問題 5.4 (教科書 133 ページ)

1. (1) $x/a = X$, $y/b = Y$, $z/c = Z$ とおくと与えられた領域 (V とする) は XYZ 空間の、原点中心の単位球体 $X^2 + Y^2 + Z^2 \leq 1$ (B とする) に対応する。またヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(X, Y, Z)} = abc$$

である。よって求める体積を v とすれば、変数変換公式より

$$\begin{aligned} v = \iiint_V dxdydz &= \iiint_B abc\, dX\, dY\, dZ \\ &= abc \iiint_B dX\, dY\, dZ = abc\frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

(2) 与えられた不等式は $(x/a)^{2/3} + (y/a)^{2/3} + (z/a)^{2/3} \leq 1$ と書けるので、$(x/a)^{1/3} = X$, $(y/a)^{1/3} = Y$, $(z/a)^{1/3} = Z$ とおくと、与えられた領域 (V とする) は XYZ 空間内の原点中心の単位球体 (B とする) に対応する。またヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(X, Y, Z)} = 3aX^2 \cdot 3aY^2 \cdot 3aZ^2 = 27a^3X^2Y^2Z^2$$

である。よって求める体積を v とすれば、

$$v = \iiint_V dxdydz = 27a^3 \iiint_B X^2Y^2Z^2\, dX\, dY\, dZ$$

となる。さらにこれを極座標

$$X = r\sin\theta\cos\phi,\ Y = r\sin\theta\sin\phi,\ Z = r\cos\theta$$

を使って表すと、（ヤコビアンは $r^2\sin\theta$ だったことを思い出して）E を $r\theta\phi$ 空間の領域 $\{0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ として

$$\begin{aligned} \iiint_B X^2Y^2Z^2\, dX\, dY\, dZ &= \iiint_E (r\sin\theta\cos\phi)^2(r\sin\theta\sin\phi)^2(r\cos\theta)^2\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta d\phi \\ &= \int_0^1 r^8\, dr \int_0^\pi \sin^5\theta\cos^2\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\sin^2\phi\, d\phi \\ &= \cdots = \frac{1}{9}\cdot\frac{16}{105}\cdot\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。以上から

$$v = \frac{4\pi a^3}{35}.$$

(3) $x^2+y^2=2x$ は中心 $(1,0)$ の単位円を表す。この円の内部を D, 与えられた領域を V とすると

$$V=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\, x^2+y^2\le z\le 2x\}$$

である。よって求める体積を v とすれば、

$$v=\iint_D\{2x-(x^2+y^2)\}dxdy.$$

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおけば、D は $r\theta$ 平面の領域 $E:=\{-\pi/2\le\theta\le\pi/2,\, 0\le r\le 2\cos\theta\}$ に対応する。よって重積分の変数変換公式より

$$\begin{aligned}
v&=\iint_E(2r\cos\theta-r^2)\,rdr\,d\theta\\
&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(2r\cos\theta-r^2)r\,dr\\
&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{16}{3}\cos^4\theta-4\cos^4\theta\right)d\theta=\frac{4}{3}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{8}{3}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

3. (1) 回転体の体積の公式（問題 5.4 **2**) から、求める体積は

$$\int_0^{\pi}\pi\sin^2x\,dx=2\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2x\,dx=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$