微分積分学第一 宿題の解答例（6 月 26 日出題分)

問題 5.2 (教科書 121 ページ)

1. (1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと D に対応する領域は $\{0 \le \theta \le 2\pi,\ a \le r \le 2a\}$ であるから,（ヤコビアンが r であることに注意して）

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} &= \int_a^{2a} dr \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^{2m}} d\theta \\ &= 2\pi \int_a^{2a} r^{1-2m} dr\end{aligned}$$

となる。最後の定積分は $m = 1$, $m \neq 1$ で場合分けをして計算をして、求める重積分は

$$\begin{cases} \frac{\pi}{1-m} a^{2-2m}(2^{2-2m}-1) & m \neq 1, \\ 2\pi \log 2 & m = 1. \end{cases}$$

(2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと D に対応する領域は $\{0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1\}$ であるから,（ヤコビアンが r であることに注意して）

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2}\, r d\theta \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

(3) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと、例題 5.2.4 より D に対応する領域は $\{-\pi/2 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le \cos\theta\}$ であるから,（ヤコビアンが r であることに注意して）

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dxdy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^2 \cos\theta\, dr \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\cos\theta} r^2\, dr \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

2. (1) $u = x - y$, $v = x + y$ とおくと $x = (u+v)/2$, $y = (-u+v)/2$ であるから、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

となる。またこの変数変換で D は uv 平面の領域 $\{0 \le u \le 2,\, 0 \le v \le 2\}$ に対応するので、重積分の変数変換公式より

$$\begin{aligned} \iint_D (x-y)e^{x+y} dx\, dy &= \int_0^2 du \int_0^2 ue^v \frac{1}{2}\, dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 u\, du \int_0^2 e^v dv \\ &= e^2 - 1 \end{aligned}$$

(2) $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ とおくと、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

となる。またこの変数変換で D は $r\theta$ 平面の単位円板 $\{0 \le r \le 1,\, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ に対応するので、重積分の変数変換公式より

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx\, dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 a^2 r^2 \cos^2\theta \cdot abr\, dr \\ &= a^3 b \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^1 r^3\, dr \\ &= \cdots = \frac{a^3 b}{4}\pi \end{aligned}$$

(3) D を定める不等式は $(x+y)^2 + y^2 \le 1$ と書き換えられる。そこで $u = x+y, v = y$ とおくと D は uv 平面内の原点中心の単位円板に対応する。$x = u - v, y = v$ よりヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

となる。よって uv 平面の単位円版を E とすれば

$$\iint_D (x+y)^4 dx\, dy = \iint_E u^4\, du\, dv$$

となる。さらにこれを極座標 $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$ を使って書き換えると、変数変換公式より

$$\begin{aligned} \iint_E u^4\, du\, dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^4 \cos^4\theta\, r\, dr \\ &= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta = \cdots = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

3. (1) 空間の極座標を使うと、与えられた積分領域は $r\theta\phi$ 空間の領域

$$E := \{0 \le \theta \le \pi/2,\, 0 \le \phi \le \pi/2,\, 0 \le r \le a\}$$

に対応する。よって変数変換公式より、ヤコビアンが $r^2 \sin\theta$ となることに注意して、

$$\begin{aligned}\iiint_D x\,dx\,dy\,dz &= \iiint_E r\sin\theta\cos\phi \cdot r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \\ &= \int_0^a r^3\,dr \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta \int_0^{\pi/2} \cos\phi\,d\phi = \frac{\pi}{16}a^4.\end{aligned}$$

(2) 空間の極座標を使うと、与えられた積分領域は $r\theta\phi$ 空間の領域

$$E := \{0 \le \theta \le \pi,\, 0 \le \phi \le 2\pi,\, 0 \le r \le a\}$$

に対応する。よって変数変換公式より

$$\begin{aligned}\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz &= \iiint_E r^2 \cdot r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \\ &= \int_0^a r^4\,dr \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4\pi}{5}a^5.\end{aligned}$$