微分積分学第一 宿題の解答例（6 月 26 日出題分)

問題 5.1 (教科書 115 ページ)

1. (1)

$$\begin{aligned}\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} xe^y\, dy &= \int_0^2 xdx \int_{x^2}^{2x} e^y\, dy \\ &= \int_0^2 xdx\, [e^y]_{x^2}^{2x} \\ &= \int_0^2 x(e^{2x} - e^{x^2})dx\end{aligned}$$

となる。部分積分より

$$\int_0^2 xe^{2x} = \frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4},$$

また

$$\int_0^2 xe^{x^2} dx = [\frac{1}{2}e^{x^2}]_0^2 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

となるから、

$$\int_0^2 x(e^{2x} - e^{x^2})dx = \left(\frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}(e^4 - 1) = \frac{1}{4}e^4 + \frac{3}{4}.$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy \int_0^{\pi/2} y \sin xy dx &= \int_0^1 ydy \int_0^{\pi/2} \sin xydx \\ &= \int_0^1 ydy \left[-\frac{1}{y}\cos xy\right]_0^{\pi/2} \\ &= -\int_0^1 \left(\cos\frac{\pi y}{2} - 1\right) dy \\ &= \cdots = 1 - \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

2. (1)

$$\begin{aligned}\iint_D \sin(2x+y)dx\, dy &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} \sin(2x+y)dy \\ &= \int_0^{\pi/2} dx\, [-\cos(2x+y)]_0^{\pi/2} \\ &= -\int_0^{\pi/2} \left\{\cos(2x + \frac{\pi}{2}) - \cos 2x\right\} dx \\ &= \cdots = 1.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2y+y^2)dx\,dy &= \int_1^2 dx \int_2^3 (x^2y+y^2)dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}y^3\right]_2^3 dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{5}{2}x^2+\frac{19}{3}\right)dx = \cdots = \frac{73}{6}.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\iint_D xdx\,dy &= \int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-y^2)dy = \cdots = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{a^2-y^2}dx\,dy &= \int_{-a}^a dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2}\,dx \\ &= \int_{-a}^a \sqrt{a^2-y^2}\,2\sqrt{a^2-y^2}dy \\ &= 2\int_{-a}^a (a^2-y^2)dy = \cdots = \frac{8a^3}{3}\end{aligned}$$

3. (1) 積分領域は $\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\,0\le y\le 2\sqrt{1-x^2}\}$ であるが、図を描けばわかるようにこれは

$$\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le 2,\,-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\le x\le\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\right\}$$

と書き換えられるので、与えられた累次積分は

$$\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} f(x,y)dx$$

と書ける。

(2) 積分領域は $\{(x,y)\,|\,-2\le x\le 1,\,x^2\le y\le -x+2\}$ であるが、図を描けばわかるようにこれは

$$\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,\,-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}\}\quad\cup\quad\{(x,y)\,|\,1\le y\le 4,\,-\sqrt{y}\le x\le 2-y\}$$

と書けるので、与えられた累次積分は

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$$

と書ける。