微分積分学第一 宿題の解答例（6 月 5 日出題分)

問題 4.4 (教科書 106 ページ)

1.（問題文にある仮定 $f_x^2 + f_y^2 \neq 0$ は、正確には $f_x(a,b)^2 + f_y(a,b)^2 \neq 0$ の意味である。）$f_x(a,b)^2 + f_y(a,b)^2 \neq 0$ のとき、$f_x(a,b) \neq 0$ または $f_y(a,b) \neq 0$ の少なくともいずれかが成立する。$f_y(a,b) \neq 0$ のとき、陰関数定理より、関係式 $f(x) = 0$ の、点 (a,b) における陰関数で $y = \varphi(x)$ のかたちのものが存在する。したがって (a,b) における $f(x,y) = 0$ の接線が存在し、その方程式は

$$y = b + \varphi'(a)(x-a) \qquad [1]$$

で与えられる。さらに陰関数定理より

$$\varphi'(a) = -\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$$

である。これを [1] に代入して、接線の方程式は

$$y = b - \frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}(x-a)$$

である。両辺に $f_y(a,b)$ をかけて整理すると

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = 0$$

を得る。これは示すべき式である。

$f_y(a,b) \neq 0$ のときは、以上の計算で x と y の役割を入れ替えればよい。（必ず一度何も見ずにやってみること。）

2. (1) $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^5 - x + 1$ とおくと

$$f_x = 3x^2 + 3y - 1, \quad f_y = 3x + 5y^4$$

より $f_y(2,-1) = 11 \neq 0$ であるから、陰関数定理より方程式 $f(x,y) = 0$ は点 $(2,-1)$ およびその近くにおいて $y = \varphi(x)$ の形の陰関数をもつ。(「その近く」でも陰関数が存在するのは、$f_y = 3x + 5y^4$ は連続関数なのである点で 0 でなければその近くでも 0 とはならないから。）よって再び陰関数定理から

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{3x^2 + 3y - 1}{3x + 5y^4},$$
$$\varphi'(2) = -\frac{12 - 3 - 1}{11} = -\frac{8}{11}$$

3. (1) $f(x,y) = 3x^2 - xy^3 + 2xy + y - x$ とおくと

$$f_x = 6x - y^3 + 2y - 1,$$
$$f_y = -3xy^2 + 2x + 1$$

より、$f_x(1,2) = 1$, $f_y(1,2) = -9$ である。よって陰関数定理より、関係式 $f(x,y) = 0$ は点 $(1,2)$ の近くで $y = \varphi(x)$ の形の陰関数を持ち、

$$\varphi'(1) = -\frac{f_x(1,2)}{f_y(1,2)} = \frac{1}{9}.$$

よって $f(x,y) = 0$ は点 $(1,2)$ で接線を持ちその方程式は

$$y = 2 + \frac{1}{9}(x-1)$$

である。(ここまでチェック済み)

4. (1) $f(x,y) = x^2 - 2xy^3 + y^2$ とおくと

$$f_y = -6xy^2 + 2y \quad \therefore f_y(1,1) = -4 \neq 0$$

であるから、方程式 $f(x,y) = 0$ は点 $(1,1)$ の近くで $y = \varphi(x)$ の形の陰関数をもつ。$x^2 - 2x\varphi^3 + \varphi^2 = 0$ の両辺を微分して

$$2x - 2(\varphi^3 + 3x\varphi^2\varphi') + 2\varphi\varphi' = 0 \qquad [2]$$

$$\therefore \varphi' = -\frac{2(x-\varphi^3)}{-6x\varphi^2 + 2\varphi} \quad \therefore \varphi'(1) = -\frac{2(1-1)}{-6+2} = 0.$$

さらに [2] を（2 で割った後）もう一度微分して

$$1 - 3\varphi^2\varphi' - 3\{\varphi^2\varphi' + 2x\varphi(\varphi')^2 + x\varphi^2\varphi''\} + \{(\varphi')^2 + \varphi\varphi''\} = 0.$$

この式で $x = 1$ とすると、$\varphi'(1) = 0$, $\varphi(1) = 1$ であることから

$$1 - 3\varphi''(1) + \varphi''(1) = 0$$

となる。これより $\varphi''(1) = 1/2$.

5. (1) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - 1$ とおくと $f_y = x + 4y$ であるから、方程式 $f(x,y) = 0$ は $x + 4y \neq 0$ を満たす点においては $y = \varphi(x)$ の形の陰関数をもつ。そのような点 (x,y) で $\varphi'(x)$ を求めるために、$x^2 + x\varphi + 2\varphi^2 - 1 = 0$ の両辺を微分して

$$2x + \varphi + x\varphi' + 4\varphi\varphi' = 0 \quad \therefore \varphi' = -\frac{2x+\varphi}{x+4\varphi} \qquad [3]$$

よって $\varphi' = 0$ を満たすのは $2x + \varphi = 0$、すなわち $\varphi = -2x$ のときである。これを $x^2 + x\varphi + 2\varphi^2 - 1 = 0$ に代入して x について解くと、$x = \pm 1/\sqrt{7}$ を得る。すなわち陰関数 $\varphi(x)$ が極値をもちうる x の値は $\pm 1/\sqrt{7}$ である。このとき

$$\varphi = -2x = \mp \frac{2}{\sqrt{7}} \quad \text{(複合同順)}$$

である。実際にこれらの点 $(1/\sqrt{7}, -2/\sqrt{7})$ および $(-1/\sqrt{7}, 2/\sqrt{7})$ で極値をとるかどうかを決めるために φ'' の値を求める。[3] の第一式の両辺を微分して

$$2 + \varphi' + \varphi' + x\varphi'' + 4\{(\varphi')^2 + \varphi\varphi''\} = 0$$

この式で $x = \pm 1/\sqrt{7}$ と置けば、$\varphi' = 0$, $\varphi = \mp 2/\sqrt{7}$（複合同順）となることに注意して

$$2 \pm \frac{1}{\sqrt{7}}\varphi'' + 4\left(\mp \frac{2}{\sqrt{7}}\right)\varphi'' = 0. \quad \text{(複合同順)} \qquad [4]$$

を得る。これより

$$\varphi''\left(\pm \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \pm \frac{2}{\sqrt{7}} \quad \text{(複合同順)}$$

よって $\varphi(x)$ は $x = 1/\sqrt{7}$ で極小値 $-2/\sqrt{7}$ をとり、$x = 1/\sqrt{7}$ で極大値 $2/\sqrt{7}$ をとる。

6. (1) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$, $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ とおくと、

$$F_x = f_x - \lambda g_x = -1 - \lambda(2x),$$
$$F_y = f_y - \lambda g_y = 1 - \lambda(2y),$$

なので、$F_x = F_y = 0$ のとき $\lambda \neq 0$ であり

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda}.$$

これを条件式 $g(x, y) = 0$ に代入して、

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 2 = 0 \quad \therefore \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

これより $(x, y) = (1, -1), (-1, 1)$ を得る。最大値と最小値の存在は認めてよいことにしていたので、$f(1, -1)$, $f(-1, 1)$ のうち大きい方が最大値、小さい方が最小値である。

$$f(1, -1) = -2, \quad f(-1, 1) = 2$$

であるから、求める極値は 2（＝最大値; $(x, y) = (-1, 1)$ のとき）および -2（＝最小値; $(x, y) = (1, -1)$ のとき）である。(ちなみに本問は、$(x, y) = \sqrt{2}(\cos\theta, \sin\theta)$ おいて θ で微分して求めるほうがずっと簡単である。)

7. (1) まず

$$f(x,y) = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

で等号成立は $(x,y) = 0$ のときであるから、f は原点で最小値 0 をとる。また、

$$f_x = 2x + y, \quad f_y = x + 2y$$

より $f_x = f_y = 0$ となるのは原点のみである。よって f は円の内部では原点以外で極値はとらない。よって最大値は円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上でとる。これは条件付き極値問題であり、ラグランジュの未定乗数法により **6** (1) と同じようにして求まる。($g = x^2 + y^2 - 1$ とおく。) 計算結果は、未定乗数が $\lambda = 3/2, 1/2$ であり、そのときの (x,y) の値はそれぞれ $\pm(1,1)/\sqrt{2}$ ($\lambda = 3/2$ のとき), $\pm(1,-1)/\sqrt{2}$ ($\lambda = 1/2$ のとき) となる。$(x,y) = \pm(1,1)/\sqrt{2}$ のとき $f(x,y) = 3/2$, $(x,y) = \pm(1,-1)/\sqrt{2}$ のとき $f(x,y) = 1/2$ となるので、f が最大値をとるのは $(x,y) = (1,1)/\sqrt{2}$ および $(x,y) = (-1,-1)\sqrt{2}$ のときであり、値は $3/2$.