微分積分学第一 中間試験の解答例（5 月 29 実施)

1. (1) $y = ax$ とすると $x \neq 0$ のとき

$$\frac{ax^2}{x^2 + (ax)^2} = \frac{a}{1 + a^2}$$

となるので、$x \to 0$ のときの極限値は $a/(1 + a^2)$。これは a に依存する。よって与えられた極限は存在しない。

(2) 合成関数の微分法から

$$z_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$
$$z_y = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

となるから、点 $(1, -1)$ における値は

$$z_x(1, -1) = \frac{1}{2},$$
$$z_y(1, -1) = \frac{1}{2}$$

となる。また

$$z(1, -1) = \mathrm{Tan}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

である。よって求める接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y + 1) - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。

(3) (2) で求めた式をさらに微分して

$$z_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$z_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

を得る。よって $z_{xx} + z_{yy} = 0$.

2. (1) $y = \tan x$ とおくと、$x = \mathrm{Tan}^{-1} y$ であり、逆関数の微分法から

$$(\mathrm{Tan}^{-1} y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

(2) 等比級数の公式 $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ の x に $-y^2$ を代入して、

$$\frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - y^6 + \cdots \left(= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n} \right).$$

これを積分すると、(1) より

$$\mathrm{Tan}^{-1} y = c + y - \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{7} y^7 + \cdots$$

となる定数 c が存在する。$y = 0$ とおいて $c = 0$ を得る。よって

$$\mathrm{Tan}^{-1} y = y - \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{7} y^7 + \cdots \left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1} \right)$$

(3) $x = 1$ で展開したいので $x - 1 = t$ とおくと、$t = x + 1$ なので

$$f(x) = \frac{t+2}{(t+1)^2 + 3(t+1)} = \frac{t+2}{(t+4)(t+1)}$$

を得る。部分分数展開をすると

$$\frac{t+2}{(t+4)(t+1)} = \frac{2}{3} \frac{1}{t+4} + \frac{1}{3} \frac{1}{t+1}$$

となる。そして

$$\frac{1}{t+4} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{t}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} t^n,$$

$$\frac{1}{t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

となるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3} \left(\frac{2}{4^{n+1}} + 1 \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3} \left(\frac{2}{4^{n+1}} + 1 \right) (x-1)^n. \end{aligned}$$

3. $z = z(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき、連鎖律より

$$\begin{aligned} z_r &= z_x \cos\theta + z_y \sin\theta, && [1] \\ z_\theta &= z_x(-r\sin\theta) + z_y(r\cos\theta) \\ &= r(-z_x \sin\theta + z_y \cos\theta) && [2] \end{aligned}$$

を得る。これと $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より $z_r^2 + (z_\theta/r)^2 = z_x^2 + z_y^2$ を得る。[1] をもう一回 r で微分すると、連鎖律より、($z_x = z_x(x, y) = z_x(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 等より z_x, z_y も r の関数であることに注意して)

$$\begin{aligned} z_{rr} &= (z_{xx}\cos^2\theta + z_{xy}\sin\theta\cos\theta) + (z_{yx}\cos\theta\sin\theta + z_{yy}\sin^2\theta) \\ &= z_{xx}\cos^2\theta + z_{yy}\sin^2\theta + 2z_{xy}\sin\theta\cos\theta \quad (\because z_{xy} = z_{yx}) && [3] \end{aligned}$$

を得る。また、[2] を θ で微分すると、再び z_x, z_y は r, θ の関数であることに注意して、

$$\begin{aligned} z_{\theta\theta} = r[&-\{z_{xx}(-r\sin\theta) + z_{xy}(r\cos\theta)\}\sin\theta - z_x\cos\theta \\ &+ \{z_{yx}(-r\sin\theta) + z_{yy}(r\cos\theta)\}\cos\theta - z_y\sin\theta] \end{aligned}$$

となる。これを整理して

$$z_{\theta\theta} = r(rz_{xx}\sin^2\theta - 2rz_{xy}\sin\theta\cos\theta - z_x\cos\theta + rz_{yy}\cos^2\theta - z_y\sin\theta). \qquad [4]$$

[1],[3],[4] より

$$\begin{aligned} z_{rr} + \frac{1}{r}z_r + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = &(z_{xx}\cos^2\theta + z_{yy}\sin^2\theta + 2z_{xy}\sin\theta\cos\theta) \\ &+ \frac{1}{r}(z_x\cos\theta + z_y\sin\theta) \\ &+ \frac{1}{r}(rz_{xx}\sin^2\theta - 2rz_{xy}\sin\theta\cos\theta - z_x\cos\theta + rz_{yy}\cos^2\theta - z_y\sin\theta) \end{aligned}$$

となり、右辺を整理すると

$$z_{xx}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + z_{yy}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

となるので $z_{xx} + z_{yy}$ に等しい。

4. (1) e^x の原点における整級数展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

より

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy\left\{1 - \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^n + \cdots\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!2^n}(x^2+y^2)^n xy \end{aligned}$$

(2) 合成関数の微分法から

$$f_x = ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-x) = y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

となるので式の対称性から

$$f_y = x(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

を得る。これらより、$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となるのは $y(1-x^2) = x(1-y^2) = 0$ を満たす (x,y)、すなわち次の 5 点であることがわかる：

$$(0,0),\ (1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1)$$

次にもう一階微分して

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -2xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + (1-x^2)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-x) \\ &= xy(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \\ f_{xy} &= (1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + (1-x^2)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-y) \\ &= (1-x^2)(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \\ f_{yy} &= xy(y^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \end{aligned}$$

を得る。よって $D(x,y) = f_{xy}(x,y)^2 - f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$ とおくと

$$D(0,0) = 1,\ D(1,1) = D(-1,-1) = D(1,-1) = D(-1,1) = -4e^{-2}$$

となるから、f は $(0,0)$ では極値をとらず、それ以外の 4 点では極値をとる。さらに

$$f_{xx}(1,1) = f_{xx}(-1,-1) = -2e^{-1} < 0,\ f_{xx}(1,-1) = f_{xx}(-1,1) = 2e^{-1} > 0$$

となるから、$(1,1),(-1,-1)$ では極大値をとり $(-1,1),(1,-1)$ では極小値をとる。以上より f は $(1,1),(-1,-1)$ で極大値 e^{-1} をとり、$(1,-1),(-1,1)$ で極小値 $-e^{-1}$ をとる。