微分積分学第一 宿題の解答例（5 月 22 日出題分)

問題 4.3 (教科書 99 ページ)

6. (1) $(e^{x+y})_x = e^{x+y}$ より $(e^{x+y})_x$ の $(0,0)$ における値は 1 である。極値をとるためには偏微分がともに消えていなければならないから、e^{x+y} は $(0,0)$ で極値をとらない。

(2) $f(x,y) = x^2 + y^2 + y^3$ とおくと、$f_x = 2x,\ f_y = 2y + 3y^2$ なので、$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ である。さらに $f_{xx} = 2, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2 + 6y$ より

$$f_{xx}(0,0) = 2,\ f_{xy}(0,0) = 0,\ f_{yy}(0,0) = 2$$

である。よって点 $(0,0)$ で

$$(D =)\, f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = -4 < 0$$

である。よって $f(x,y)$ は原点で極値をとる。さらに $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ であるから、極小値をとる。（値はもちろん 0 である。）

7. (1) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - 4y$ のとき

$$f_x = 2x + y,\ f_y = x + 4y - 4$$

となるので $f_x = f_y = 0$ となるのは $2x + y = 0$ かつ $x + 4y - 4 = 0$ のときである。これらを解いて

$$(x,y) = \left(-\frac{4}{7}, \frac{8}{7}\right)$$

となる。$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = 1,\ f_{yy} = 4$ であるから

$$(D =)\, f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 1 - 8 = -7 < 0, \quad f_{xx} > 0$$

であるから、$f(x,y)$ は $(x,y) = (-4/7, 8/7)$ で極小値をとる。値は $-16/7$.

(2) $f(x,y) = x^3 + 2xy - x - 2y$ のとき

$$f_x = 3x^2 + 2y - 1,\ f_y = 2x - 2$$

となるので $f_x = f_y = 0$ となるのは $(x,y) = (1,-1)$ のときであることがわかる。さらに

$$f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = 2,\ f_{yy} = 0$$

より、点 $(1,-1)$ で

$$(D =)\, f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 4 > 0$$

である。よって f は $(1,-1)$ で極値をとらない。以上から f が極値をとる点は存在しない。