微分積分学第一 宿題の解答例（5 月 15 日出題分)

問題 4.3 (教科書 99 ページ)

1. (1)

$$\begin{aligned}\left(2\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f &= \left(2\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y}\right)(2f_x+3f_y)\\ &= 4f_{xx}+6f_{yx}+6f_{xy}+9f_{yy}\\ &= 4f_{xx}+12f_{xy}+9f_{yy} \quad (\because f_{xy}=f_{yx}).\end{aligned}$$

(2) $f(x,y)=e^{2x+y}$ のとき

$$\begin{gathered} f_x = 2e^{2x+y},\ f_y = e^{2x+y},\\ f_{xx}=4e^{2x+y},\ f_{xy}=2e^{2x+y},\ f_{yy}=e^{2x+y}\end{gathered}$$

であるから、

$$f_{xx}(0,0)=4,\ f_{xy}(0,0)=2,\ f_{yy}(0,0)=1.$$

よって (1) から

$$\left(\left(2\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\right)(0,0)=4\cdot 4+12\cdot 2+9\cdot 1=49.$$

2. (1) $z=x^3y+xy^2$ のとき

$$z_x=3x^2y+y^2,\ z_y=x^3+2xy,$$

なので

$$z_{xx}=6xy,\ z_{xy}=z_{yx}=3x^2+2y,\ z_{yy}=2x.$$

(2) $z=x\sin xy$ のとき

$$z_x=\sin xy+xy\cos xy, \quad z_y=x^2\cos xy$$

なので

$$\begin{aligned} z_{xx} &= y\cos xy+y\cos xy+xy^2(-\sin xy)\\ &= 2y\cos xy-xy^2\sin xy,\\ z_{xy} &= x\cos xy+x\cos xy+x^2y(-\sin xy)\\ &= 2x\cos xy-x^2y\sin xy,\\ z_{yy} &= -x^3\sin xy.\end{aligned}$$

3. (1) $z = \log(x^2 + y^2)$ のとき、連鎖律より

$$z_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

となるので、

$$\begin{aligned} z_{xx} &= 2\frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

となる。よって与式の対称性から、

$$z_{yy} = 2\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

となる。これらより

$$\Delta z = z_{xx} + z_{yy} = 0.$$

(2) $z = \frac{x}{x^2+y^2}$ のとき

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - (y^2 - x^2)2(x^2 + y^2)2x}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= -2x\frac{3y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^3}, \end{aligned}$$

また

$$z_y = x\frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

より

$$z_{yy} = (-2x)\frac{x^4 - 2x^2y^2 - 3y^4}{(x^2 + y^2)^4}$$

を得る。これらより容易に

$$\Delta z = z_{xx} + z_{yy} = 0$$

を得る。

4. $z = z(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき、連鎖律より

$$z_r = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta. \qquad [1]$$

これをもう一回 r で微分すると、連鎖律より、($z_x = z_x(x, y) = z_x(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 等より z_x, z_y も r の関数であることに注意して)

$$\begin{aligned} z_{rr} &= (z_{xx}\cos^2\theta + z_{xy}\sin\theta\cos\theta) + (z_{yx}\cos\theta\sin\theta + z_{yy}\sin^2\theta) \\ &= z_{xx}\cos^2\theta + z_{yy}\sin^2\theta + 2z_{xy}\sin\theta\cos\theta \quad (\because z_{xy} = z_{yx}) \end{aligned} \qquad [2]$$

を得る。また、

$$\begin{aligned} z_\theta &= z_x(-r\sin\theta) + z_y(r\cos\theta) \\ &= r(-z_x\sin\theta + z_y\cos\theta), \end{aligned}$$

より(再び z_x, z_y は r, θ の関数であることに注意して)

$$\begin{aligned} z_{\theta\theta} = r[&-\{z_{xx}(-r\sin\theta) + z_{xy}(r\cos\theta)\}\sin\theta - z_x\cos\theta \\ &+ \{z_{yx}(-r\sin\theta) + z_{yy}(r\cos\theta)\}\cos\theta - z_y\sin\theta] \end{aligned}$$

となる。これを整理して

$$z_{\theta\theta} = r(rz_{xx}\sin^2\theta - rz_{xy}\sin\theta\cos\theta - z_x\cos\theta - rz_{yx}\sin\theta\cos\theta + rz_{yy}\cos^2\theta - z_y\sin\theta). \qquad [3]$$

[1],[2],[3] より

$$\begin{aligned} z_{rr} + \frac{1}{r}z_r + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = &(z_{xx}\cos^2\theta + z_{yy}\sin^2\theta + 2z_{xy}\sin\theta\cos\theta) \\ &+ \frac{1}{r}(z_x\cos\theta + z_y\sin\theta) \\ &+ \frac{1}{r}(rz_{xx}\sin^2\theta - rz_{xy}\sin\theta\cos\theta - z_x\cos\theta - rz_{yx}\sin\theta\cos\theta + rz_{yy}\cos^2\theta - z_y\sin\theta) \end{aligned}$$

となり、右辺を整理すると

$$z_{xx}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + z_{yy}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

となるので $z_{xx} + z_{yy}$ に等しい。

5. (1) $f(x, y) = e^{x-y}$ のとき

$$f_x = e^{x-y},\ f_y = -e^{x-y} \quad \therefore f_x(0,0) = 1,\ f_y(0,0) = -1.$$

さらに

$$f_{xx} = e^{x-y},\ f_{xy} = -e^{x-y},\ f_{yy} = e^{x-y} \quad \therefore f_{xx}(0,0) = 1,\ f_{xy}(0,0) = -1,\ f_{yy}(0,0) = 1.$$

さらに

$$f_{xxx} = e^{x-y},\ f_{xxy} = -e^{x-y},\ f_{xyy} = e^{x-y},\ f_{yyy} = -e^{x-y}$$

より $(0,0)$ での値は順に $1, -1, 1, -1$. 以上から、$f(x,y)$ の $(0,0)$ における整級数展開は

$$f(x,y) = 1 + (x-y) + \big(\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2\big) + \big(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3\big) + \cdots$$

となる。

[別解] e^x の整級数展開 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$ の x に $x-y$ を代入すれば上と同じ式を得る。