# 微分積分学第一 宿題の解答例（5 月 1 日出題分)

**問題 6.2** (教科書 157 ページ)

**2**. (1) $(1+x)^\alpha$ の $x=0$ での整級数展開は

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

であった。$x^n$ の係数を $a_n$ と書くと、$\alpha = 1/2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-3}{2})}{n!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n.$$

この式の $x$ を $x^2$ で置き換えて、

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n}.$$

(2) 例 10 (教科書 153 ページ) で求めた整級数展開

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

の $x$ を $ix$ ($i$ は虚数単位) で置き換えれば, $(ix)^{2n} = i^{2n}x^{2n} = (-1)^n x^{2n}$ に注意して、

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n x^{2n} \qquad [1]$$

(3) 合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} \left(\log(x+\sqrt{x^2+1})\right)' &= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n x^{2n} \quad (\because [1]). \end{aligned}$$

これを積分すれば、項別積分により

$$\log(x+\sqrt{x^2+1}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c.$$

$x=0$ とおいて $c=0$ を得る。よって

$$\log(x+\sqrt{x^2+1}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(4) 部分分数分解より

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+2x-3} &= \frac{1}{(x+3)(x-1)} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right) \end{aligned} \qquad [2]$$

となるが、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} &= -\frac{1}{1-x} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \\ \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-x/3)} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^n \end{aligned}$$

となるので、[2] より

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+2x-3} &= \frac{1}{4}\left(-\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^n\right) \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)x^n \end{aligned}$$

**3.** (1) 例 6 (教科書 152 ページ) より

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

よって

$$x^2 \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n+2}. \qquad [3]$$

一方、整級数展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

において $a_n = f^{(n)}(a)/n!$ だったので、$f^{(n)}(a) = n! a_n$ が成り立つ。よって [3] より

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0,$$
$$f^{(n)}(0) = n! \frac{(-1)^{n-1}}{n-2},\ n \geq 3.$$

(2) 指数関数の整級数展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

の $x$ を $x^2$ で置き換えて、

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}.$$

よって

$$\begin{aligned}(1+x)e^{x^2} &= e^{x^2} + xe^{x^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1}. \qquad [4]\end{aligned}$$

よって ((1) と同様の理由で)

$$f^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}, \quad f^{(2n+1)}(0) = \frac{(2n+1)!}{n!}, \quad \forall n \geq 0.$$

**4** (1) $x-1=t$ とおくと、$x = t+1$ なので

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x^2+3x} &= \frac{t+2}{(t+1)(t+4)} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{2}{t+4}\right) \qquad [5]\end{aligned}$$

となる。ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t+1} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n, \\
\frac{2}{t+4} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-t/4)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{4}\right)^n
\end{aligned}
$$

となるから、[5] より

$$
\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^2+3x} &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^n + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{4^n}\right\}t^n \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{2n+1}}\right)t^n \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{2n+1}}\right)(x-1)^n.
\end{aligned}
$$

連絡事項：来週の木曜は火曜日の講義を行う日になっているので、次回の講義は再来週の木曜（5 月 15 日）です。