微分積分学第一 宿題の解答例（4 月 24 日出題分)

問題 4.2 (教科書 90 ページ)

4. (1) $z = xy^2 - x^2y$, $x = t^2$, $y = e^t$ のとき, t に関する微分をプライムで表すと

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= z_x x' + z_y y' \\ &= (y^2 - 2xy) \cdot 2t + (2xy - x^2)e^t \\ &= (e^{2t} - 2t^2e^t)2t + (2t^2e^t - t^4)e^t \\ &= -(t^4 + 4t^3)e^t + 2t(1+t)e^{2t}\end{aligned}$$

(2) $z = \mathrm{Tan}^{-1}(xy)$, $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^{2t}$ のとき $(\mathrm{Tan}^{-1}u)' = \frac{1}{1+u^2}$ だったので、連鎖律より

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= z_x x' + z_y y' \\ &= \frac{y}{1+(xy)^2}(e^t - e^{-t}) + \frac{x}{1+(xy)^2} \cdot 2e^{2t} \\ &= \frac{e^{2t}}{1+(e^{3t}+e^t)^2}(e^t - e^{-t}) + \frac{e^t + e^{-t}}{1+(e^{3t}+e^t)^2}2e^{2t} \\ &= \frac{3e^{3t}+e^t}{1+(e^{3t}+e^t)^2}\end{aligned}$$

5 (1) $z = xy^2 + x^2y$, $x = u + v$, $y = u - v$ のとき、連鎖律より

$$\begin{aligned}z_u &= z_x x_u + z_y y_u \\ &= (y^2 + 2xy) \cdot 1 + (2xy + x^2) \cdot 1 \\ &= x^2 + 4xy + y^2 \\ &= (u+v)^2 + 4(u+v)(u-v) + (u-v)^2 \\ &= 6u^2 - 2v^2, \\ z_v &= z_x x_v + z_y y_v \\ &= (y^2 + 2xy) \cdot 1 + (2xy + x^2) \cdot (-1) \\ &= y^2 - x^2 \\ &= (u-v)^2 - (u+v)^2 \\ &= -4uv.\end{aligned}$$

(2) $z = \sin(x-y)$, $x = u^2+v^2$, $y = 2uv$ のとき、連鎖律から

$$\begin{aligned}
z_u &= z_x x_u + z_y y_u \\
&= \cos(x-y)\cdot 2u - \cos(x-y)\cdot 2v \\
&= 2(u-v)\cos(u-v)^2, \\
z_v &= z_x x_v + z_y y_v \\
&= \cos(x-y)\cdot 2v - \cos(x-y)\cdot 2u \\
&= 2(v-u)\cos(u-v)^2.
\end{aligned}$$

(3) $z = f(x,y)$, $x = 2u-3v$, $y = u-5v$ のとき、連鎖律から

$$\begin{aligned}
z_u &= z_x x_u + z_y y_u \\
&= 2f_x - f_y, \\
z_v &= z_x x_v + z_y y_v \\
&= -3f_x - 5f_y.
\end{aligned}$$

（実際には、こうして得られた x, y の関数に $x = 2u-3v$, $y = u-5v$ を代入する。）

6. $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$, $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ (α は定数) のとき、連鎖律より

$$\begin{aligned}
z_u &= z_x x_u + z_y y_u \\
&= z_x\cos\alpha + z_y\sin\alpha, \\
z_v &= z_x x_v + z_y y_v \\
&= z_x(-\sin\alpha) + z_y\cos\alpha
\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}
z_u^2 + z_v^2 &= (z_x\cos\alpha + z_y\sin\alpha)^2 + (-z_x\sin\alpha + z_y\cos\alpha)^2 \\
&= z_x^2 + z_y^2
\end{aligned}$$

となる。

9. (1) $x = au+bv, , y = cu+dv$ のとき $x_u = a$, $x_v = b, y_u = c$, $y_v = d$ となるから

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= x_u y_v - x_v y_u \\
&= ad - bc
\end{aligned}$$

（つまり一次変換に対してはヤコビアンは通常の行列式である。）

(2) $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$, $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$ (教科書 19 ページ参照) なので、$x = r\cosh t$, $y = r\sinh t$ のとき

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad x_t = r\frac{e^t - e^{-t}}{2}, \\ y_r &= \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad x_t = r\frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} &= x_r y_t - x_t y_r \\ &= \frac{r}{4}(e^t + e^{-t})^2 - \frac{r}{4}(e^t - e^{-t})^2 \\ &= r. \end{aligned}$$