微分積分学第一 宿題の解答例（4 月 17 日出題分)

問題 1.3 (教科書 19 ページ) **1**.
(1) $\mathrm{Cos}^{-1}(1/2)$ とは $\cos x = \frac{1}{2}$ で $0 < x < \pi$ を満たす x のことなので $\mathrm{Cos}^{-1}(1/2) = \pi/3$.
(3) $\mathrm{Tan}^{-1}(-\sqrt{3}/3)$ とは $\tan x = -\sqrt{3}/3$ で $-\pi/2 < x < \pi/2$ を満たす x のことなので、$\mathrm{Tan}^{-1}(-\sqrt{3}/3) = -\pi/6$.

問題 2.1 (教科書 31 ページ) **1**.
(7) 講義でやったように（教科書 29 ページ参照）

$$(\mathrm{Sin}^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

だったので、合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Sin}^{-1}(x^3+1)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}} \cdot (x^3+1)' \\ &= \frac{3x^2}{\sqrt{-x^3(2+x^3)}}.\end{aligned}$$

(12) 同じく合成関数の微分法から、

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' &= \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \\ &= \cdots = \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

問題 4.1 (教科書 84 ページ) **4**.
(8)

$$(\mathrm{Tan}^{-1}u)' = \frac{1}{1+u^2}$$

だったので、$z = \mathrm{Tan}^{-1}(y/x)$ に対して、合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}z_x &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{y}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

同じく合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} z_y &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

(10) $w = \mathrm{Sin}^{-1}(x+yz)$ のとき、同じく合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{(x+yz)_x}{\sqrt{1-(x+yz)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+yz)^2}}, \\ w_y &= \frac{(x+yz)_y}{\sqrt{1-(x+yz)^2}} = \frac{z}{\sqrt{1-(x+yz)^2}}, \\ w_z &= \frac{(x+yz)_z}{\sqrt{1-(x+yz)^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-(x+yz)^2}}. \end{aligned}$$

問題 4.2 (教科書 90 ページ) **3**.

(1) $z = 3x^2y + xy$ より

$$\begin{aligned} z_x &= 6xy + y, \\ z_y &= 3x^2 + x \end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} z_x(1,-1) &= -7, \\ z_y(1,-1) &= 4. \end{aligned}$$

したがって点 $(1,-1,-4)$ における $z = 3x^2y + xy$ の接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z &= -7(x-1) + 4(y+1) - 4 \\ &= -7x + 4y + 7. \end{aligned}$$

これより $7x - 4y + z = 7$ を得る。よって法線ベクトルとして $(7,-4,1)$ がとれる。

(2) $z = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2}$ より

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{x}{2}, \\ z_y &= \frac{2y}{3^2} \end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} z_x(2,-3) &= 1, \\ z_y(2,-3) &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

したがって点 $(2,-3,2)$ における $z=\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}$ の接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z &= 1(x-2)-\frac{2}{3}(y+3)+2 \\ &= x-\frac{2}{3}y-2. \end{aligned}$$

これより $3x-2y-3z=6$ を得る。よって法線ベクトルとして $(3,-2,-3)$ がとれる。