微分積分学第一 宿題 解答例（4 月 10 日出題分)

問題 4.1 (教科書 84 ページ)

1. (1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta\sin\theta$$

となるから $|\cos\theta| \leq 1$, $|\sin\theta| \leq 1$ より

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq r$$

である。よって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{r\to 0} r = 0$$

したがって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

(3) x 軸に沿って原点に近づけたときの極限値は

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

である。一方 y 軸に沿って原点に近づけたときの極限値は

$$\lim_{y\to 0}\frac{2y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} 2 = 2$$

である。これらは相異なるので極限は存在しない。

(5) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと

$$\frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^{\frac{3}{2}}\sqrt{|\sin\theta|}}{r} = \sqrt{r}\sqrt{|\sin\theta|} \leq \sqrt{r}$$

であり、$r \to 0$ のとき $\sqrt{r}$ は 0 に収束するので

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

2. (1) xz 平面による切り口は、$y = 0$ を代入して $z = 1$ となる。yz 平面による切り口は、$x = 0$ を代入して $z = -1$ となる。（図は略。定数関数のグラフなので、水平な直線である。）

3. (1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ が成立しているかどうか確かめればよい。$(x,y) \neq (0,0)$ のとき、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$$

となるから、

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| &= r\left|\cos^3\theta + \sin^3\theta\right| \\ &\leq r(|\cos^3\theta| + |\sin^3\theta|) \\ &\leq 2r\end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$$

である。これは $f(0,0)$ に等しいので、$f(x,y)$ は原点で連続である。（もちろん他の任意の点 (x,y) でも連続である。）

4. 単なる計算なので解答は略。(たとえば x で偏微分するときは、他の変数はすべて定数と思って微分する。)

5. (1) $z_x = 3x^2y^3,\ z_y = 3x^3y^2$ となるから

$$\begin{aligned}xz_x + yz_y &= 3x^3y^3 + 3x^3y^3 \\ &= 6x^3y^3\end{aligned}$$

となる。これは $6z$ に等しい。