# 微分積分学第一 (7)

**山田光太郎**

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calc1/

2014.05.28 (2014.05.28 **訂正**)

# ご意見から

**ご意見：** 授業の PowerPoint の資料も事前配布してほしい．

**コメント：** PowerPoint ではありません．
提示資料は当日朝に電車の中で作ったりしているので，難しいです．

**ご意見：** 睡摩の“摩”はどういった用法でしょうか...

**コメント：** 睡魔ではないでしょうか．

**ご意見：** パソコン画面のマウスポインターってどうやって動かしてるんでしょうか．マウスを使っていらっしゃらないように見えるのですが...

**コメント：** ワイヤレス・トラックボール（通称「ごろねマウス」）を使っています．

# 質問から

Q: **偏微分，方向微分，全微分などいろいろな微分がありますが，化学や物理などでは用途によってそれぞれどのように使い分けるのですか?**

A: **形容詞，形容動詞，助詞などさまざまな品詞がありますが，日常生活ではどのように使い分けるのですか?**

Q: **教授の温かい人柄を見ていると，教授が悪魔に変貌するとは到底考えられません．**
**ボクの目がおかしいのでしょうか?**

A: **おかしいのです．**

# 質問から

Q: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(c > 0)$ **をとくとき，**
$\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ **はどのように決めたのですか．**

A: **うまくいくように決めた．**
**この置換を思いついたのが偉いので，** d'Alembert **の解法という名前がついている．**

# 質問から

Q: **命題** 6.5 **の**

$$d(G \circ F)(\mathbf{x}) = dG\bigl(F(\mathbf{x})\bigr)dF(\mathbf{x})$$

**の「右辺の積が行列の積を表す」とありますが，行列の積だといわれるまで気づきませんでした．どこを見て行列の積だと判断すべきなのでしょうか**?

A: **ではどんな積だと思ったのでしょう．**
**定義から** $dG$ **も** $dF$ **も行列．それが並んでいたら「行列の積」と思うのが自然．**
**ひとつ記号が数を表すのか，ベクトル，行列を表すのか，関数を表すのかを文脈で判断しましょう．**

# 質問から

Q: p47 の命題 6.8 において，$d(F^{-1})\bigl(F(\mathbf{x})\bigr)$ は $\bigl(F(\mathbf{x})\bigr)d(F^{-1})$ のことですか?
$d(F^{-1})\bigl(F(\mathbf{x})\bigr) = dE$ ということでしょうか?
$d(F^{-1})\bigl(F(\mathbf{x})\bigr) = \bigl(dF^{-1}(\mathbf{x})\bigr)^{-1}$ の式が理解できません．

A: 書いてあるとおりに読めば良い．

$$d\bigl(F^{-1}\bigr)\bigl(F(\mathbf{x})\bigr) = \bigl(dF(\mathbf{x})\bigr)^{-1}.$$

**左辺：** 写像 $F^{-1}$ の微分写像 $d(F^{-1})$ の $F(\mathbf{x})$ における値
**右辺：** 写像 $F$ の微分写像 $dF$ の $\mathbf{x}$ における値の逆行列

# 写像の微分（ヤコビ行列）

$$D := \left\{(r,\theta)\,\middle|\, r>0, -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}, \qquad U := \{(x,y)\,|\,x>0\}$$

**に対して写像**

$$F:\mathbb{R}^2 \supset D \ni (r,\theta) \longmapsto (x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2$$

**を次で定める：**

$$F(r,\theta)=(x,y) \qquad x(r,\theta)=r\cos\theta, \quad y(r,\theta)=r\sin\theta.$$

$F$ **の微分（ヤコビ行列）は**

$$dF\left(=dF(r,\theta)\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}.$$

# 写像の微分（ヤコビ行列）

$$D := \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; r>0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}, \qquad U := \{(x,y) \mid x>0\}$$

に対して写像

$$G : \mathbb{R}^2 \supset U \ni (x,y) \longmapsto (r,\theta) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

を次で定める：

$$G(x,y) = (r,\theta) \qquad r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

$G$ の微分（ヤコビ行列）は

$$dG\Bigl(= dG(x,y)\Bigr) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

# 合成写像

$$D := \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}, \quad U := \{(x,y) \mid x > 0\}$$

$$F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad G(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$$

**この状況で**

$$\begin{aligned}
F\circ G(x,y) &= F\bigl(G(x,y)\bigr) = F\left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \\
&= \left(\sqrt{x^2+y^2}\cos\tan^{-1}\frac{y}{x}, \sqrt{x^2+y^2}\sin\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \\
&= (x,y) = \mathrm{id}_U(x,y) \qquad (\textbf{恒等写像}) \\
G\circ F(r,\theta) &= G\bigl(F(r,\theta)\bigr) = G\bigl(r\cos\theta, r\sin\theta\bigr) \\
&= \left(\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}, \tan^{-1}\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) \\
&= (r,\theta) = \mathrm{id}_D(r,\theta) \qquad (\textbf{恒等写像})
\end{aligned}$$

# 逆写像

$$D := \left\{ (r,\theta) \,\middle|\, r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}, \qquad U := \{(x,y) \mid x > 0\}$$

$$F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad G(x,y) = \left( \sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x} \right)$$

**この状況で**

$$F \circ G = \mathrm{id}_U, \qquad G \circ F = \mathrm{id}_D \qquad (\mathrm{id}_U,\ \mathrm{id}_D \text{ は恒等写像})$$

**このとき**

$$G = F^{-1} \qquad F = G^{-1} \qquad (\text{逆写像})$$

# 合成関数と逆関数の微分公式

**一般に**

$$d(F\circ G) = (dF)(dG) \qquad d\bigl(F\circ G(x,y)\bigr) = dF\bigl(G(x,y)\bigr)dG(x,y)$$
$$d(G\circ F) = (dG)(dF) \qquad d\bigl(G\circ F(r,\theta)\bigr) = dG\bigl(F(r,\theta)\bigr)dF(r,\theta).$$

**とくに $G=F^{-1}$ という状況では**

$$d(F\circ G) = d\,\mathrm{id}_U = E \qquad d(G\circ F) = d\,\mathrm{id}_D = E \qquad E = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

**すなわち**

$$(dF)(dG) = E, \qquad (dG)(dF) = E \qquad (G=F^{-1})$$

**だから，**

$$dG = d(F^{-1}) = (dF)^{-1}$$

# 合成関数と逆関数の微分公式

$$
\begin{aligned}
F(r,\theta) &= (r\cos\theta, r\sin\theta) \\
G(x,y) &= \left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = F^{-1}(x,y)
\end{aligned}
$$

**このとき**

$$
\begin{aligned}
dF(r,\theta) &= \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\
dG(x,y) &= \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

**すなわち**

$$
\begin{aligned}
dF(r,\theta) &= \bigl(dG(r\cos\theta, r\sin\theta)\bigr)^{-1}, \\
dG(x,y) &= \left(dF\left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

# ラプラシアンの極座標表示

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \qquad (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$$

**まず**

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix}$$

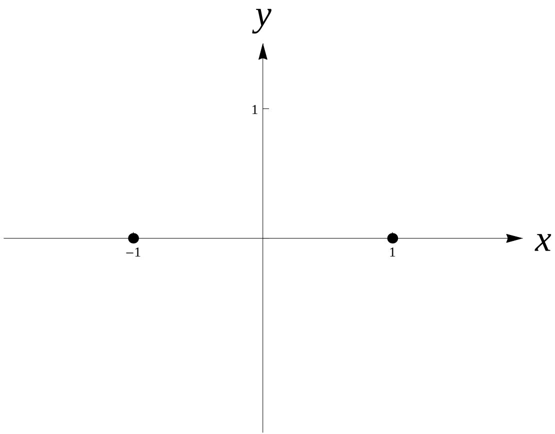
**だから**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= r_x \frac{\partial u}{\partial r} + \theta_x \frac{\partial u}{\partial \theta} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \\ &\quad - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \end{aligned}$$

# Cassinian Oval

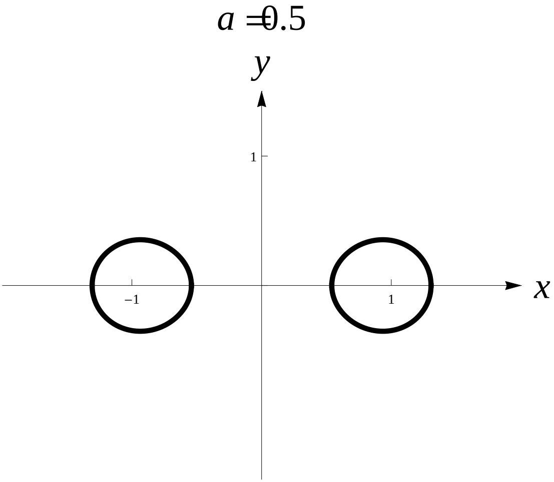
$$F(x,y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 - a, \quad C = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$$

$$a = 1$$



# Cassinian Oval

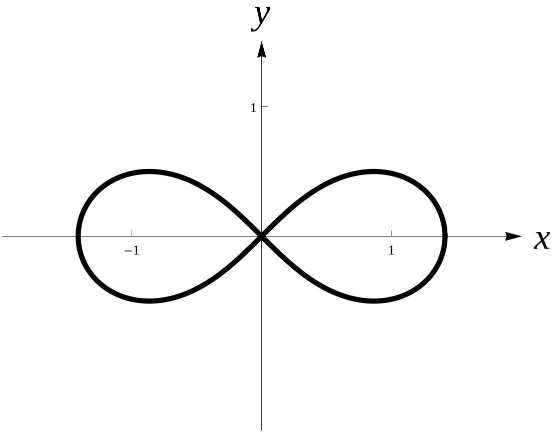
$$F(x,y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 - a, \quad C = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$$



# Cassinian Oval

$$F(x,y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 - a, \quad C = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$$

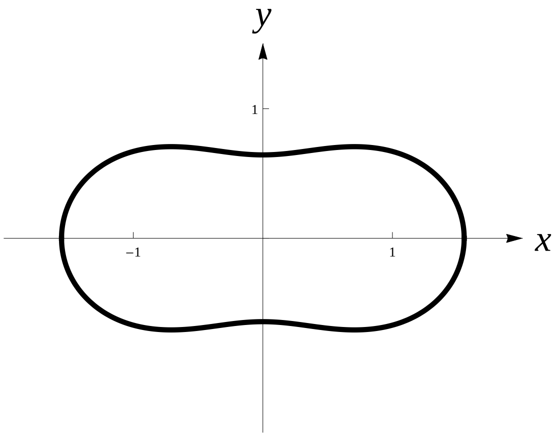
$a = 0$



# Cassinian Oval

$$F(x,y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 - a, \quad C = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$$

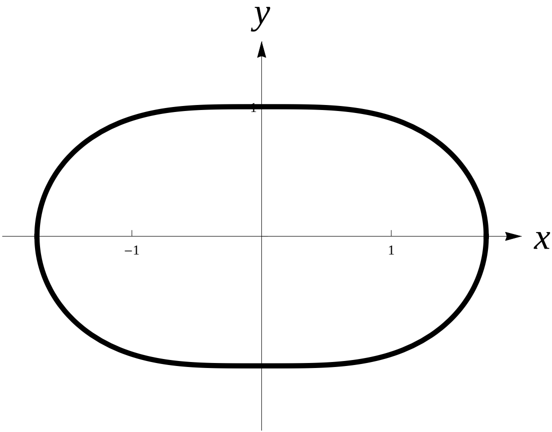
$$a = -1$$



# Cassinian Oval

$$F(x,y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 - a, \quad C = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$$

$a = -3$



# Cassinian Oval

$$F(x,y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 - a, \quad C = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$$

$a = -4$