微分積分学第一 N 組 期末試験前練習問題

1. 任意の自然数 n について，$x > 0$ のとき，

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} < e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

   が成り立つことを示せ．

2. つぎの関数 f は，$(x, y) = (0, 0)$ で全微分可能だが C^1-級でないことを示せ．

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ o & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. $f(x, y)$ を C^2-級関数とし，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により極座標 (r, θ) を用いて変数変換するとき，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

   が成り立つことを示せ．

4. $f(x) = \arcsin x$ とするとき $(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$ を示せ．さらに，この式を高階微分することにより $f^{(n)}(x)$ に関する漸化式を求め，$f^{(n)}(0)$ を計算せよ．

5. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 - y^2)$ の極値と鞍点を求めよ．

6. $x^3 - 3x + y^2 - 2y - 2 = 0$ の陰関数の極値を求めよ．

7. 条件 $2x^2 + y^2 = 1$ のもとで関数 $f(x, y) = xy$ の極値をあたえる候補をラグランジュの未定乗数法をもちいて求め，さらにそれらの候補が極値か否かを判定せよ．

略解

1. $f(x) = e^{-x}$ とおくと $f^{(k)}(0) = (-1)^k$ なので，マクローリンの定理から，ある $0 < \theta < 1$ で

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1} + (-1)^k\frac{e^{-\theta x}}{k!}x^k$$

をみたすものが存在する．最後の項は $x > 0$ より k が偶数のとき負，k が奇数のとき正なので，この項を削ることにより評価式がえられる．

2. f は $(0,0)$ で偏微分可能で，$f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$ であることは容易に計算できる．さらに $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$ $(x^2+y^2 \to 0)$ なので全微分可能．一方，$y = 0$ における x に関する偏導関数は

$$f_x(x,0) = \begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{|x|} - \dfrac{x}{|x|}\sin\dfrac{1}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

であり，たとえば $\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ とすると，$x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ だが $f_x(x_n, 0) \to 1$ となり，f_x は $(x,y) = (0,0)$ で連続でない．

3. 教科書 105 ページ例 4.8 参照．

4. $y = f(x)$ とすると $\sin y = x$ である．この両辺を x で微分すると $y'\cos y = 1$．さらに x で微分すると $y''\cos y - y'y'\sin y = 0$．この式に $\cos y$ をかければ $y''\cos^2 y - (y'\cos y)(y'\sin y) = 0$ となり，求める等式がえられる．

   等式の両辺を繰り返し微分することにより，$n \geq 2$ に対し $y = f(x)$ の高階導関数に関する漸化式

$$(1-x^2)f^{(n)}(x) + (3-2n)xf^{(n-1)}(x) - (n-2)^2 f^{(n-2)}(x) = 0$$

   が得られる．これと $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ より

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} ((n-2)!!)^2 = ((n-2)(n-4)\cdots 1)^2 & n \text{ が 2 以上の奇数のとき} \\ 0 & n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

5. 極値および鞍点は

$$f_x = 2xe^{-x^2-y^2}(-x^2+y^2+1) = 0$$
$$f_y = 2ye^{-x^2-y^2}(-x^2+y^2-1) = 0$$

   をみたす．この解は五つで

$$(x,y) = (0,0),\ (\pm 1, 0),\ (0, \pm 1)$$

さらに 2 階の偏微分を計算すると

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= 2e^{-x^2-y^2}(2x^4-(2y^2+5)x^2+(y^2+1)) \\
f_{xy} &= 4xye^{-x^2-y^2}(y^2-x^2+2) \\
f_{yy} &= 2e^{-x^2-y^2}(-2y^4+(2x^2+5)y^2-(x^2+1))
\end{aligned}
$$

そこで $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ に上で求めた四つの点の座標を代入して計算すると，$(0,0)$ では $\Delta < 0$ であり，鞍点．$(\pm 1, 0)$ では，$\Delta > 0$ で $f_{xx} < 0$ であり極大値を，$(0, \pm 1)$ のとき $\Delta > 0$ で $f_{xx} > 0$ であり極小値をとる．

6. 教科書 122 ページ例 4.20 参照．

7. 教科書 126 ページ例 4.21 により四つの候補 $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ が求まる．ここから先は自力で考える必要がある．たとえばつぎは如何か？

   制約条件である $2x^2+y^2=1$ は，原点を内側に含む楕円の方程式であり，(x,y) の動ける範囲はこの楕円上にある．その軌跡を $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ から半時計回りに辿ると第 1 象限，第 2 象限，第 3 象限，第 4 象限を経て元に戻る．一方，$(x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1)$ で $f=0$ であり．かつ $2x^2+y^2=1$ 上では

$$
\begin{aligned}
x>0,\, y>0 &\ \Rightarrow\ f>0 \\
x<0,\, y>0 &\ \Rightarrow\ f>0 \\
x<0,\, y<0 &\ \Rightarrow\ f>0 \\
x>0,\, y<0 &\ \Rightarrow\ f>0
\end{aligned}
$$

   したがてワイエルシュトラスの定理により f は各象限で少なくとも一つの極値をとる．一方，候補は四つしかないのでいずれも極値をあたえる．