微分積分学第一 N組　第 4 章

Last Update on March 31, 2014

4　偏微分

4.1　二変数関数の連続性

4.1.1　二変数関数

- **例：** $f(x,y) = x^3y + 4x^2y^2$ など.

4.1.2　平面の領域

- **定義：** 平面 $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)\,;\, x,\, y \in \mathbb{R}\}$ 上の 2 点 $P(a,b)$, $Q(c,d)$ 間の**距離**を

$$d(P,Q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

で定義する.
$P(a,b)$ を中心とする半径 r の開円板 $B_r(P)$ とは

$$B_r(P) = \{Q \in \mathbb{R}^2\,;\, d(P,Q) < r\}$$

のこと.
部分集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ は,

$$\forall P \in D \;\; \exists r > 0 \; s.t. \; B_r(P) \subset D$$

をみたすとき**開集合**という.
補集合が開集合となる部分集合を**閉集合**とよぶ.
開集合が，その中の任意の 2 点が区分的線分で結べるとき**開領域**，閉集合が同じ性質をもつとき**閉領域**という．閉あるいは開を指定しないで**領域**とよぶこともある.

- **定義：**$\mathbb{R}^2$ 内の点列 $\{Q_n\}$ は，

$$d(Q_n, P) \to 0 \ (n \to \infty)$$

をみたすとき，P に**収束する**といい，$Q_n \to P \ (n \to \infty)$ で表す．

- **定義：**領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し，$\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\{(x,\, y,\, f(x,\, y))\,;\, (x, y) \in D\}$$

を f の**グラフ**という．

4.1.3　２変数関数の極限

- **定義：**2 変数関数 $f(x, y)$ について，定点 $P(a, b)$ に対し

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\ (d(Q, P) < \delta) \wedge (Q \neq P) \implies |f(Q) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つとき，Q が P に近づくとき f は**極限値** α **に収束する**といい，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x, y) \to \alpha \ \ ((x, y) \to (a, b))$$

で表す．

- **例 4.3：**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

を求めてみよう．

4.1.4　２変数関数の連続性

- **定義：**領域 D で定義された関数 f が $P(a, b) \in D$ において

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

をみたすとき，P **で連続である**といい，D の任意の点で連続であるとき，**領域** D **上で連続である**という．

- **例 4.4：**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

および

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

の原点での連続性を確かめよう．

- **定理 4.1（連続関数の和，差，積，商）：**二つの関数 f, g が $P(a,b)$ で連続のとき

  1. $\lambda f + \mu g$ （c, d は定数）
  2. fg
  3. f/g （ただし $g(a,b) \neq 0$）

  はそれぞれ $P(a,b)$ で連続である．

  証明：省略！ □

- **定理 4.2（合成関数の連続性）：**$u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$ がともに (a,b) で連続で，$\alpha = f(a,b)$, $\beta = g(a,b)$ とするとき，$h(u,v)$ が (α,β) で連続であるならば，$h(f(x,y), g(x,y))$ は (a,b) で連続．

  証明：省略！ □

- **定理 4.3（連続関数の最大・最小）：**$f(x,y)$ が有界な閉領域 D 上で連続ならば，f は D 内で最大値および最小値を取る．

  証明：省略！ □

● **演習問題 4.1（p.99）：**各問の奇数番を解答せよ！

4.2 偏微分と全微分

4.2.1 偏微分

- **定義：**領域 D で定義された 2 変数関数 $z = f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ において，極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

  が定まるとき，x に関して**偏微分可能**といい，この極限値を**偏微分係数**とよび，

$$f_x(a,b), \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

  で表す．

  y に関する偏微分等も同様に定義される．

- **定義：**$z = f(x, y)$ が開領域 D の各点で x に関して偏微分可能のとき，D の各点に偏微分係数を対応させる関数を**偏導関数**とよび，

$$z_x,\ \ z_x(x,y),\ \ f_x,\ \ f_x(x,y),\ \ \frac{\partial z}{\partial x},\ \ \frac{\partial f}{\partial x},\ \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \ \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

で表す．

- **定義：**開領域 D 上の関数 f が偏微分可能で，しかも二つの偏導関数が D 上で連続であるとき，f は D 上 C^1**-級関数**という．

- **例 4.6：**つぎの関数は偏微分可能であるが連続でない．

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4.2.2 全微分

- **定義：**領域 D 上の 2 変数関数 $f(x, y)$ が，点 $(a, b) \in D$ において

$$\exists A\, \exists B\ s.t. \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

をみたすとき，f は (a, b) において**全微分可能**という．
全微分可能性は，極限を取る関数の分子を $\varepsilon(h, k)$ と置いて，f は定数 A, B を用いて

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + \varepsilon(h,k) \tag{1}$$

と表せ，しかも

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つとき，としても定義できる．

- **定理 4.4：**関数 $f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能ならば，(a, b) において偏微分可能であり，かつ連続．さらに式 (1) は

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + \varepsilon(h,k) \tag{2}$$

と表せる．
証明：講義で解説！ □

- **定義：**f が D の各点で全微分可能のとき，D 上で全微分可能であるといい，

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

というシンボルを，$z = f(x, y)$ の**全微分**という．

4.2.3 全微分の図形的意味

- **空間における直線の方程式（復習？）：** $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り，$\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ 方向に進む直線（図示）は

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = x_0 + a\,t \\ y = y_0 + b\,t \\ z = z_0 + c\,t \end{cases}$$

$abc \neq 0$ のとき

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (= t)$$

$ab \neq 0,\ c = 0$ のとき

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (= t), \quad z = z_0$$

$a \neq 0,\ b = c = 0$ のとき

$$y = y_0, \quad z = z_0$$

で表せる．

- **空間における平面の方程式（復習？）：** 平面 Π に垂直なベクトクを $\boldsymbol{h} = (a, b, c)$ とする（図示）．
$\boldsymbol{h}$ の始点を $\boldsymbol{q} = (x_0, y_0, z_0)$ とおけば，Π は

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{h} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad ax + by + cz + d = 0 \end{aligned}$$

で表せる．

- **練習問題：**

  1. $(1, 2, 3)$ を通り，$x + y + z = 0$ で定義される平面に直交する直線の方程式を求めよ．
  2. $(1, 2, 3)$ を含み，ベクトル $(1, 1, 1)$ に直交する平面の方程式を求めよ．

- 式 (2) を $x = a + h,\ y = b + k$ で書き直し，さらに ε の項を切り落とすと，

$$f(x, y) - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \tag{3}$$

という，$\mathbb{R}^3$ 内の平面を表す式が得られる．この面は，f のグラフの $(a, b, f(a, b)))$ に置ける**接平面**である．全微分は，この式の各座標軸の誤差項を微分の形で書き直したものである．

- 接平面 (3) に直交し $(a,b,f(a,b)) \in \mathbb{R}^3$ を通る直線は，f のグラフの $(a,b,f(a,b))$ の**法線**と呼ばれ，

$$(x-a)+f_x(a,b)(z-f(a,b))=0=(y-b)+f_y(a,b)(z-f(a,b))$$

で与えられる．

証明：前の等号は平面 $y=b$ に含まれる f グラフの接ベクトル $(1,0,f_x(a,b))$ と直交する条件，後ろの等号は平面 $x=a$ に含まれる f グラフの接ベクトル $(0,1,f_y(a,b))$ と直交する条件． □

- **定理 4.5：**開領域 D 上の C^1-級関数は全微分可能．

証明：講義で解説！ □

4.2.4 合成関数の微分法

- **定理：**$z=f(x,y)$ が開領域 D で全微分可能，$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ が t の区間 I で微分可能で $(\varphi(t),\psi(t)) \in D$ $(t \in I)$ をみたすとする．このとき

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

証明：講義で解説！ □

- **例 4.7（方向微分）：**(a,b) における方向 (h,k) に関する微分は，$x=a+ht$, $y=b+kt$ と置いて

$$\frac{dz}{dt}=h\frac{\partial z}{\partial x}+k\frac{\partial z}{\partial y}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

で表せる．$(h,k)=(1,0)$ の場合が x に関する偏微分．

- **定理 4.7（合成関数の偏微分）：**$z=f(x,y)$ は開領域 D で全微分可能，$x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ は u,v の開領域 E で偏微分可能で $(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \in D$ $((u,v) \in E)$ をみたすとき，

$$\frac{dz}{du}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{dz}{dv}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{4}$$

が成り立つ．

証明：講義で解説！ □

- **例 4.8：**$z=f(x,y)$ を C^1-級関数とする．$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ による**極座標** (r,θ) を用いて変数変換すると

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$$

証明：講義で解説！ □

4.2.5 ヤコビアン

- **定義：**連鎖律 (4) を行列を用いて表すと

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

右の行列を変換行列をみなし，この行列式を x, y の u, v に関する**ヤコビアン**といい，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

で表す．

- **例 4.9：**極座標 (r, θ) に対しては

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

● **演習問題 4.2（p.106）：**各問の偶数番を解答せよ！

4.3 高次偏導関数とテーラーの定理

4.3.1 高次偏導関数

- **定義：**偏導関数がさらに偏微分可能のとき，その導関数を 2 **次偏導関数**といい，

$$(f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{xy}$$

などにより表す．より一般に n **次偏導関数**が定義される．
すべての変数の順序に関して n 回偏微分可能で，さらに n 回導関数がすべて連続のとき，C^n**-級関数**という．さらに任意回偏微分可能で，すべての偏導関数が連続であるとき C^∞**-級関数**という．

- **定理 4.8：**$z = f(x, y)$ は開領域 D で C^2-級関数であれば，

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

が成り立つ．
証明：講義で解説！ □

- **例　4.10：**関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

について，

$$f_{xy}(0,0)=-1 \qquad f_{yx}(0,0)=1$$

であることを確かめる．’

- **例 4.12：**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

証明：講義で解説！ □

4.3.2　テーラーの定理

- **例 4.13：**$z=f(x,y)$ を C^n-級関数とする．$j=1,2,\cdots,n$ に対して

$$\frac{d^j}{dt^j}f(a+ht,b+kt)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a+ht,b+kt)$$

が成り立つ．

証明：講義で解説！ □

- **定理 4.9（2 変数関数のテーラーの定理：**$z=f(x,y)$ は開領域 D で定義された C^n-級関数，(a,b) および $(a_h,b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれるとする．このとき

$$f(a+h,b+k)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k)$$

をみたす $0<\theta<1$ が存在する．

証明：講義で解説！ □

- **例 4.14（2 変数関数の平均値の定理：**テーラーの定理の $n=1$ の場合で

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+hf_x(a+\theta h,b+\theta k)+kf_y(a+\theta h,b+\theta k)$$

をみたす $0<\theta<1$ が存在する．

- **例 4.15：**$n=2$ のときはつぎのように書き換えることができる．

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\{h^2 f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2 f_{yy}(a,b)\}+\gamma(h,k) \end{aligned}$$

ただし

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\gamma(h,k)|}{h^2+k^2}=0$$

証明：講義で解説！ □

● **演習問題 4.3（p.112）：**1. から 4. の奇数番と 5. を解答せよ！

4.4 ２変数関数の極値

4.4.1 極値

- **定義：**関数 $z=f(x,y)$ が $P(a,b)$ において

$$\exists r>0\ s.t.\ \forall (x,y)\in B_r(P)\backslash\{P\},\ f(x,y)<f(a,b)$$

をみたすとき，f は P で**極大値を取る**といい，そこでの値 $f(P)$ を**極大値**という．
不等号の向きを変えて**極小値**等が定義される．
極大値と極小値をあわせて**極値**という．

- **定理 4.10：**$z=f(x,y)$ が $P(a,b)$ で極値をとるなら

$$f_x(a,b)=0=f_y(a,b)$$

証明：講義で解説！ □

- **例 4.16：**

1. $f(x,y)=x^2+y^2$ は $(0,0)$ で極小値 0 を取る．
2. $f(x,y)=-x^2-y^2$ は $(0,0)$ で極大値 0 を取る．
3. $f(x,y)=x^2-y^2$ は $(0,0)$ で極値を取らない．このような点を**鞍点**という．

説明：講義で解説！

- **定理 4.11（極値の判定法）：**$z = f(x, y)$ が C^2-級であり，$f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$ が成り立つとする．このとき $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b), \Delta = AC - B^2$ とおく．

  1. $\Delta > 0$, $A > 0$ のとき，$f(a, b)$ は極小値．$\Delta > 0$, $A < 0$ のとき，$f(a, b)$ は極大値．
  2. $\Delta < 0$ のとき (a, b) は鞍点
  3. $\Delta = 0$ のときは判定できない．

  証明：講義で解説！ □

● **演習問題 4.4（p.118）：**各問の奇数番を解答せよ！

4.5 陰関数と条件付き極値問題

4.5.1 陰関数

- **定義：**関数 $z = f(x, y)$ のグラフの $z = 0$ での切り口の点は $f(x, y) = 0$ をみたす．このときしばしば y は x の（多価？）関数とみなせる．こうして得られる x の関数 $y = \varphi(x)$ は，$f(x, \varphi(x)) = 0$ をみたす．この $y = \varphi(x)$ を $f(x, y) = 0$ で定義された**陰関数**という．

- **例 4.18：**$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ について考察しよう．

- **定理 4.12（陰関数定理）：**$z = f(x, y)$ は C^1-級であり，$f(a, b) = 0$ かつ $f_y(a, b) \neq 0$（これは $f(x, y) = 0$ の (a, b) での接線が y 軸と平行にならないための条件）ならば，$x = a$ を含む開区間 I で定義された $f(x, y) = 0$ で定義された陰関数 $y = \varphi(x)$ で，$\varphi(a) = b$ となるものが存在する．さらに $y = \varphi(x)$ は微分可能で，

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

  が成り立つ．

- **例 4.19：**$z = f(x, y)$ が C^2-級で，$f(a, b) = 0$, $f_y(a, b) \neq 0$ とすると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3} \tag{5}$$

  が成り立つ．

  証明：講義で解説！ □

- **注意 4.2：**陰関数の極値を求めるには $y' = \varphi'(x) = 0$ の点，すなわち $f_x = 0$ の点を見つける必要がある．これを (5) に代入すると

$$y'' = -\frac{f_{xx}}{f_y}$$

という必要条件が得られる．これは便利な公式である．

- **例 4.20：**上の注意を用いて $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2 - 2y - 2 = 0$ の陰関数の極値を求めて見よ！

4.5.2 条件付き極値問題

- **定理 4.14（ラグランジュの未定乗数法）：**$\varphi(x, y) = 0$ の条件の下で，関数 $z = f(x, y)$ が (a, b) において極値をもつとし，

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

とおく．もし $\varphi_x(a, b) \neq 0$ または $\varphi_y(a, b) \neq 0$ ならば

$$F_x(a, b, \alpha) = F_y(a, b, \alpha) = F_\lambda(a, b, \alpha) = 0$$

をみたす α が存在する．

証明：講義で解説！ □

- **例 4.21：**$2x^2 + y^2 = 1$ の下で，関数 $f(x, y) = xy$ の極値の候補を求めてみよう．

● **演習問題 4.5（p.127）：**各問の偶数番を解答せよ！