

微分積分学第一 N組 第2章

Last Update on March 31, 2014

2 一変数関数の微分

2.1 微係数と導関数

2.1.1 微係数

- **定義：**関数 $f : D \rightarrow R$ は, $x = a \in D$ において極限值

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = A$$

が存在するとき, f は $x = a$ で**微分可能**といい, 極限值 A を $f'(a)$ で表し, f の a での**微分係数**という.

$x \rightarrow a$ という記号の定義により, D は a に収束する点列を含むことは前提.

- **微分の定義式の置き換え：**2番目の定義式を極限を取らずに

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = A + \varepsilon(h)$$

と置くと, 微分可能性は

$$\exists A, \text{ s.t. } \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = A + \varepsilon(h) \implies \varepsilon(h) \rightarrow 0 \ (h \rightarrow 0)$$

と表せる.

さらに割り算を避けると, 微分可能性は,

$$\exists A, \text{ s.t. } f(a + h) = f(a) + Ah + h\varepsilon(h) \implies \varepsilon(h) \rightarrow 0 \ (h \rightarrow 0)$$

と表せる. この表記は微分の理論を多次元に拡張するときに有用.

2.1.2 導関数

- **定義：** $D \subset \mathbb{R}$ で定義された関数 $y = f(x)$ が D の各点で微分可能であるとき、 $a \in D$ に対し $f'(a)$ を対応させる関数を f の導関数といい、

$$y', \quad f', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

等で表す.

- **微分可能な例：**

1. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$
2. $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$
3. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

証明： 講義で解説！

□

- **連続だが微分可能でない例：** $y = |x|$ は $x = 0$ で微分可能ではない.

- **定理 2.1：** 微分可能なら連続.

証明： 講義で解説！

□

- **定理 2.2：** f, g を、 $D \subset \mathbb{R}$ で定義された微分可能な関数、 c を定数とする.

1. cf は微分可能で $(cf)' = cf'$.
2. $f \pm g$ は微分可能で $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
3. fg は微分可能で $(fg)' = f'g + fg'$.
4. $g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in I)$ とすると、 f/g は微分可能で $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

が成り立つ.

証明： 略す！

□

- **定理 2.3 (合成関数の微分法)：** 微分可能な $y = f(x)$ と $z = g(y)$ の合成関数 $z = (g \circ f)(x)$ は微分可能で

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg}{dy} \frac{df}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

が成り立つ.

証明： 講義で解説！

□

- **定理 2.4 (逆関数の微分法)** : $D \subset \mathbb{R}$ で定義された狭義単調微分可能な関数 $y = f(x)$ に対し, $f'(a) \neq 0$ ($\forall a \in I$) であれば, 逆関数 f^{-1} は $J = \{f(a); a \in I\}$ で微分可能で,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

が成り立つ.

証明 : 講義で解説 !

□

- **例** :

1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $(\log |x|)' = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)

- **演習問題 2.1 (p.41)** : 各問の奇数番を解答せよ !

2.2 平均値定理

2.2.1 極小・極大

- **定義** : 関数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ が $c \in I$ で**極大**とは,

$$\exists \delta \text{ s.t. } (\forall x \in (c - \delta, c + \delta)) \wedge (x \neq c), f(x) < f(c)$$

が成り立つとき. このとき $f(c)$ を**極大値**という.

不等号の向きを変えて**極小**および**極小値**が定義される.

極大値と極小値を総称して**極値**という.

- **定理 2.5** :

$$\exists \delta \text{ s.t. } \forall x \in (c - \delta, c + \delta), f(x) \leq f(c)$$

ならば, $f'(c) = 0$. とくに極値を実現する点 c での微分係数 $f'(c)$ はゼロ.

証明 : 講義で解説 !

□

2.2.2 ロルの定理と平均値の定理

- **定理 2.6 (ロルの定理)** : 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で (a, b) で微分可能とする. このとき

$$f(a) = f(b) \implies \exists c \in (a, b) \text{ s.t. } f'(c) = 0$$

証明 : 講義で解説 !

□

- **定理 2.7 (平均値の定理)**：関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で (a, b) で微分可能とする。このとき

$$\exists c \in (a, b) \text{ s.t. } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

証明：講義で解説！

- **定理 2.8 (コーシーの平均値の定理)**：二つの関数 $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で (a, b) で微分可能とする。このとき

$$\forall x \in (a, b) \ g'(x) \neq 0 \implies (g(a) \neq g(b)) \wedge \left(\exists c \in (a, b) \text{ s.t. } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \right)$$

証明：講義で解説！

□

- **定理 2.9**：関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で (a, b) で微分可能とする。このとき

$$\forall c \in (a, b) \text{ s.t. } f'(c) = 0 \implies f \text{ は定数関数}$$

証明：講義で解説！

□

2.2.3 関数の増減

- **定理 2.10**：関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で (a, b) で微分可能とする。このとき

$$\forall x \in (a, b), \ f'(x) \geq 0 \implies f \text{ は単調増加であり } f(a) \leq f(b)$$

$\leq$ を $<$ に変えると「狭義単調増大」となる。

不等号の向きを変えると減少性がしたがう。

証明：講義で解説！

□

- **例 2.7**：

$$\frac{x}{x+1} < \log(1+x) < x \quad (\forall x > 0)$$

証明：講義で解説！

□

2.2.4 不定形の極限值

- **不定形とは**：極限をとったとき $0/0, \infty/\infty, \infty - \infty, \infty \cdot 0, \infty^0, 0^0, 1^\infty$ となる数列あるいは関数のかたち。問題は最初の場合に帰着できる。

- **定理 2.11 (ロピタルの定理)**：二つの関数 f, g が $a \in \mathbb{R}$ の周りで定義され (a では定義されていないてもよい)，かつ微分可能とする．このとき

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) \wedge \left(\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right) \implies \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

証明：講義で解説！

□

- **注意**：ロピタルの定理の結論は，不定形でない場合は成り立たない！

- **例 2.8**：

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = 2$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \log x) = +\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$

- **演習問題 2.2 (p.49)**：各問の偶数番を解答せよ！

2.3 高次の導関数

- **定義**： $y = f(x)$ の導関数 f' がさらに微分可能のとき，2 回微分可能といい， f' の導関数を f の 2 次導関数という．この操作を続けて n 次導関数が定義され，

$$f^{(n)}(x), \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

で表す．

- **定義**： f が k 回微分可能でかつ $f^{(k)}$ が連続のとき， f は C^k -級関数という．任意の k について微分可能のときは， C^∞ -級関数という．

- **例 2.9, 2.10**：各自で確かめてみよう！

- **定理 2.12 (ライプニッツの定理)**： f, g は n 回微分可能とする．このとき fg も n 回微分可能で

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

証明：講義で解説！

□

- **例 2.11, 2.12, 2.13**：各自で確認しよう！

- **演習問題 2.3 (p.52)**：1. の偶数番と 2. 3. 4. を解答せよ！

2.4 テーラーの定理

2.4.1 テーラーの定理

- **定理 2.13, 2.14 (テーラーの定理)** : 开区間 I で定義された関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ が n 回微分可能とし, 一点 $a \in I$ を固定する. このとき

$$\forall b \in I, \exists c \in (a, b) \text{ または } (b, a) \text{ s.t. } f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + R_n(c)$$

ここで剰余項 R_n は,

$$R_n(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n \quad (\text{ラグランジュの剰余項})$$

あるいは

$$R_n(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} (b-c)^{n-1}(b-a) \quad (\text{コーシーの剰余項})$$

- **証明前の記号の置き換え** : $b = x$ とおいて, $a < c < x$ のとき $\theta = \frac{c-a}{x-a}$ とすると $c = a + \theta(x-a)$ と表示できる. $0 < \theta < 1$ を使って剰余項を書き直すと

$$R_n(\theta) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n \quad (\text{ラグランジュの剰余項})$$

あるいは

$$R_n(\theta) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1}(x-a)^n \quad (\text{コーシーの剰余項})$$

- **テーラーの定理の証明** : 講義で解説!

□

2.4.2 マクローリンの定理

- **定理 2.15 (マクローリンの定理)** : テーラーの定理の $a = 0$ の場合 (記述が多少単純になる). 同様の仮定のもとに

$$\forall x \in I, 0 < \exists \theta < 1 \text{ s.t. } f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(\theta)$$

ここで剰余項 R_n は,

$$R_n(\theta) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} x^n \quad (\text{ラグランジュの剰余項})$$

あるいは

$$R_n(\theta) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x - a))}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} x^n \quad (\text{コーシーの剰余項})$$

- 例 2.14：各自確かめよう！

2.4.3 関数の極値問題への応用

- 定理 2.16：開区間 I で定義された関数 f について、つぎが成り立つ.

1. $a \in I$ について

$$f'(a) = \cdots = f^{(2n-1)}(a) = 0, \quad \text{かつ} \quad f^{(2n)}(a) \neq 0$$

ならば

$$(a) \quad f^{(2n)}(a) > 0 \implies f(x) \text{ は } x = a \text{ で極大}$$

$$(b) \quad f^{(2n)}(a) < 0 \implies f(x) \text{ は } x = a \text{ で極小}$$

2. $a \in I$ について

$$f'(a) = \cdots = f^{(2n)}(a) = 0, \quad \text{かつ} \quad f^{(2n+1)}(a) \neq 0$$

ならば, $f(x)$ は $x = a$ において極小でも極大でもない.

- 例 2.15：各自確かめよ！

2.4.4 関数の凹凸

- 定義：関数 f が, a に十分近い $x \neq a$ に対して

$$f(x) > f'(a)(x - a) + f(a)$$

をみたすとき, $x = a$ で下に凸であるという.

不等号の向きを変えて上に凸が定義される.

- 定理 2.17： $f(x)$ が開区間 I で常に $f''(x) > 0$ ならば, f は I で下に凸である.
不等号の向きを変えると結論は上に凸となる.

- 定義： $f''(a) = 0$ で, a の前後で f'' の符号が変わるとき, $x = a$ を f の変曲点という

- 例 2.18：各自で確認しよう！

- 演習問題 2.4 (p.62)：1. と 2. ～ 6. の奇数番を解答せよ！