

## 微分積分学第一 N組 中間試験 6/3/2014

答案用紙は4枚綴である。各問ごとに1枚を使用し、4枚すべてに名前・学籍番号を記入すること。紙面が足りない場合は裏を利用してもよい。

1.  $0 < h < 1$  をみたす実数  $h$  について、つぎの極限を求めよ（厳密に  $\varepsilon$ - $N$  論法で証明を記す必要はない）。

(1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+h)^n$

(2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-h)^n$

2. つぎの極限を求めよ（厳密に  $\varepsilon$ - $\delta$  論法で証明を記す必要はない）。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \tan^{-1} \frac{1}{x}$

(2)  $p, q$  を自然数としたとき  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x^p}{x^q} \right|$

3. 対数関数  $\log x$  が  $x > 0$  で連続であることを、公式  $\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$  を用いてつぎにしたがい証明せよ。

(1) 講義で証明した極限值  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$  より、 $\varepsilon_1 = 1$  とすると、

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ s.t. } |h| < \delta_1 \Rightarrow |\log(1+h)| \leq 2|h|$$

(2) 任意の  $a > 0$  に対し、 $\log x$  は  $x = a$  で連続、すなわち

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x - a| < \delta \Rightarrow |\log x - \log a| < \varepsilon$$

4. つぎのいずれか一方を選択し解答せよ（双方について解答した場合はボーナス点を加算する）。

(1) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $+\infty$  に発散するとき、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

は  $+\infty$  に発散することを証明せよ。

(2)  $f$  は  $\mathbb{R}$  を定義域とする連続関数とする。  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$  のとき、 $f$  は最大値をもつことを証明せよ。

## 解答例

1. (1)  $(1+h)^n$  を 2 項展開すると,

$$\begin{aligned}(1+h)^n &= 1 + nh + \binom{n}{2}h^2 + \cdots + h^n \\ &> 1 + nh\end{aligned}$$

なので,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $(1+h)^n \rightarrow \infty$ .

- (2)  $1 > 1-h^2 = (1-h)(1+h)$  より  $0 < 1-h < \frac{1}{1+h}$  なので,

$$0 < (1-h)^n < \frac{1}{(1+h)^n}$$

であり, (1) より  $n \rightarrow \infty$  のとき  $(1-h)^n \rightarrow 0$ .

2. (1) 任意の  $x \neq 0$  に対して  $\left| \tan^{-1} \frac{1}{x} \right| < 1$  なので,  $x \rightarrow 0$  のとき  $x \tan^{-1} \frac{1}{x} \rightarrow 0$ .

(2)

$$\left| \frac{\sin x^p}{x^q} \right| = |x^{p-q}| \left| \frac{\sin x^p}{x^p} \right|$$

である.  $|x^{p-q}|$  は  $x \rightarrow 0$  のとき  $p-q$  が正かゼロか負によって  $0, 1, +\infty$  に近づき, 一方  $x \rightarrow 0$  のとき  $x^p \rightarrow 0$  であり, したがって  $\frac{\sin x^p}{x^p} \rightarrow 1$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x^p}{x^q} \right| = \begin{cases} 0 & p > q \\ 1 & p = q \\ +\infty & p < q \end{cases}$$

3. (1) 極限值  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$  より,  $\varepsilon_1 = 1$  に対して

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ s.t. } 0 < |h| < \delta_1 \Rightarrow \frac{\log(1+h)}{h} < 1 + \varepsilon_1 = 2$$

である.  $0 < h < \delta_1$  のときは上の不等式から  $\log(1+h) < 2h$  である.  $h = 0$  のときは  $\log(1+0) = 0 = 2 \cdot 0$ .  $-\delta_1 < h < 0$  のときは,

$$\begin{aligned}\frac{\log(1+h)}{h} < 2 &\Rightarrow \log(1+h) > 2h \\ &\Rightarrow |\log(1+h)| < 2|h|\end{aligned}$$

以上から,

$$|h| < \delta_1 \Rightarrow |\log(1+h)| \leq 2|h|$$

が成り立つ.

- (2)  $a > 0$  を固定し,  $x - a = h$  とおき, 任意に  $\varepsilon > 0$  が与えられたとする. このとき  $\delta = \min \left\{ a\delta_1, \frac{a\varepsilon}{2} \right\}$  とおくと,  $|h| < \delta$  ならば  $\left| \frac{h}{a} \right| < \delta_1$  なので

$$\begin{aligned} |\log x - \log a| &= |\log(a+h) - \log a| \\ &= \left| \log \frac{a+h}{a} \right| \\ &= \left| \log \left( 1 + \frac{h}{a} \right) \right| \\ &< \frac{2|h|}{a} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

4. (1) 整数  $K > 0$  が任意に与えられたとする. このとき

$$\exists N_1 \text{ s.t. } n > N_1 \Rightarrow a_n > 3K$$

である. そこで  $N_2 = \frac{1}{K} \left| \sum_{k=1}^{N_1} a_k \right|$  とし,  $N = \max\{3N_1, N_2\}$  とおくと,  $\forall n > N$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k &= \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{N_1} a_k + \sum_{k=N_1+1}^n a_k \right) \\ &\geq -\frac{1}{N_2} \left| \sum_{k=1}^{N_1} a_k \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^n a_k \\ &> K + \frac{1}{n}(n - N_1)3K \\ &> K \end{aligned}$$

- (2)  $c \in \mathbb{R}$  を任意に選び,  $K = f(c)$  とおく. このとき  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$  より

$$\exists a \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x < a \Rightarrow f(x) < -|K| - 1$$

および

$$\exists b \in \mathbb{R} \text{ s.t. } b < x \Rightarrow f(x) < -|K| - 1$$

が成り立つ.  $f(c) = K > -|K| - 1$  なので  $a < c < b$  である. そこで閉区間  $[a, b]$  に対してワイエルシュトラスの定理を適用すると,  $f$  は閉区間  $[a, b]$  では最大値  $M$  をもつ. さらに  $x \notin [a, b]$  のときは  $f(x) < -|K| - 1 < K \leq M$  なので,  $M$  は  $f$  の最大値である.