微分積分学第一N組 中間試験前演習 5/27/2014

1. 正項数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ が成り立つとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty$$

であることを証明せよ．

2. 実数全体で定義された連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

をみたすとき，f は最大値または最小値をもつことを証明せよ．

3. 指数関数 $f(x) = e^x$ が連続であることを，指数法則 $e^{x+y} = e^x e^y$ を用いつぎにしたがって証明せよ．

(1) 講義で証明した極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ より，$\varepsilon_1 = 1$ とすると

$$\exists\delta_1 > 0 \ \ s.t. \ \ 0 < |x| < \delta_1 \ \ \Rightarrow \ \ \frac{e^x-1}{x} < 1+\varepsilon_1 = 2$$

である．この $\delta_1 > 0$ について，

$$|h| < \delta_1 \ \ \Rightarrow \ \ |e^h - 1| \le 2|h|$$

が成り立つ（$h = 0$，$h > 0$，$h < 0$ の場合に分ける！）．

(2) 任意の $a \in \mathbb{R}$ について，$f(x) = e^x$ は $x = a$ で連続，すなわち

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ \ s.t. \ \ |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |e^x - e^a| < \varepsilon$$

が成り立つ．

解答例　(訂正版)

1. 正数 $K > 0$ が与えられたとする．このとき $\exists N_1 \ \ s.t. \ \ n > N_1 \ \Rightarrow \ a_n > 2K$．そこで $N = 2N_1$ とおくと，$\forall n > N$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N_1} a_k + \sum_{k=N_1+1}^{n} a_k\right)\\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n} a_k\\ &\geq \frac{1}{n}(n-N_1)2K\\ &> K\end{aligned}$$

2. $f(x) \equiv 0$ のときは，0 が最大値かつ最小値．

$f(x) \not\equiv 0$ のとき，$f(a) \neq 0$ となる $a \in \mathbb{R}$ が存在する．$f(a) > 0$ とすると，仮定からつぎをみたす $b,\, c \in \mathbb{R}$ が存在する．

$$x < b \ \Rightarrow \ |f(x)| < f(a)/2 \qquad\qquad c < x \ \Rightarrow \ |f(x)| < f(a)/2 \tag{1}$$

とくに $a \in [b, c]$ である．そこで閉区間 $[b, c]$ に対してワイエルシュトラスの定理を適用すると，

$$\exists d \in [b, c] \ \ s.t. \ \ \forall x \in [b, c] \Rightarrow f(x) \leq f(d)$$

これと (1) より f は $x = d$ で最大値をとる．$f(a) < 0$ のときは $-f$ に対して同じ議論をすれば最小値がえられる．

3. (1) $h \geq 0$ のときは容易なので省略．

$h < 0$ のとき，

$$\begin{aligned}\frac{e^h - 1}{h} < 2 \ \ &\Rightarrow \ \ e^h - 1 > 2h\\ &\Rightarrow \ \ |e^h - 1| < 2|h|\end{aligned}$$

(2) $x - a = h$ とおき $\delta = \min\{\delta_1,\, \varepsilon/2e^a\}$ とすると，$|h| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}|e^x - e^a| &= |e^{a+h} - e^a|\\ &= |e^a e^h - e^a|\\ &= e^a|e^h - 1|\\ &\leq e^a 2|h|\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$