微分積分学第一 N組 第 1 章

Last Update on March 31, 2014

1 実数と連続関数

1.1 現代数学の表記法

1.1.2 上限・下限

- **実数**：実数の集合 $\mathbb{R}$ は，以下の性質をもつ

1. **(四則演算)** $a, b \in \mathbb{R}$ に対して和 $a + b$ ，差 $a - b$ ，積 ab ，商 b/a ($a \neq 0$) が $\mathbb{R}$ の要素として定義されており，和と積に関して交換法則，結合法則，分配法則が成り立つ。

2. **(順序)** $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$a = b, \quad a < b, \quad a > b$$

のいずれか一つが成り立ち，つぎの性質をみたま。

(i) $(a < b) \wedge (b < c) \implies a < c$

(ii) $a < b \implies \forall c \in \mathbb{R}, a + c < b + c$

(iii) $a < b \implies \forall c > 0, ac < bc$

3. **(連続の公理)** 空でない部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対し，上に有界なら S の上限が存在し，下に有界なら S の下限が存在する。

- **上 (下) 界・最大 (小) 数・上 (下) 限**：四則演算および演算に適合する順序が定義された集合を X とする。たとえば $\mathbb{R}$ や $\mathbb{Q}$ を想定している。 X の部分集合 $S \subset X$

について

定義： $x \in X$ が

$$\forall a \in S, a \leq x$$

をみたすとき, x は S の**上界**という.

たとえば $X = \mathbb{R}$ で $S = \mathbb{Z}$ のように, 上界が存在しない部分集合もあるが, 存在するとき S は上に有界という. 上界は一つ見つければ, それ以上の数はすべて上界である.

不等号の向きを変えて**下界**が定義される.

また, 上下に有界に集合は**有界**という.

定義： $x \in X$ が

$$(x \text{ は } S \text{ の上界}) \wedge (x \in S)$$

をみたすとき, x は S の**最大数** ($\max S$) という.

最大数は, 上に有界であっても存在するとは限らない.

最小数 ($\min S$) も同様に定義される.

定義： S の上界の最小数が存在するとき, それを S の**上限**といい $\sup S$ で表す.

また, S の下界の最大数が存在するとき, それを**下限**といい $\inf S$ で表す.

- **課題：**以下の $\mathbb{R}$ の部分集合について下界・最小数・下限 (=下界の最大数) を求めよう

1. $\{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x\}$

2. $\{x \in \mathbb{R}; 0 < x\}$

3. $\{1/n \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$

- **連続の公理の吟味：**連続の公理は, 実数の部分集合は上 (下) に有界な集合は必ず実数の上 (下) 限をもつことを主張する.

一方, $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$ は有界だが, $A = \{x \in \mathbb{R}; -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\} \cap \mathbb{Q}$ で, $\mathbb{Q}$ における上界の集合は $\{x \in \mathbb{Q}; x > \sqrt{2}\}$ となり, その最小数は $\mathbb{Q}$ の中には存在しない.

- **実数の定義についてのコメント：**実数 $\mathbb{R}$ が連続の公理をみたすことを証明するには, 実数を「有理数の完備化」として定義することが必要であるが, その手続きは高度な数学を要し, この講義の時間内には難しい. 一方, 完備化として定義すれば, 四則演算と順序が定義された集合は, 連続の公理をみたすとき, 互いに演算と順序を保って本質的に $\mathbb{R}$ と同じ (同型) であることが証明できる.

1.1.3 区間

- $a, b \in \mathbb{R}$ が $a < b$ をみたすとする.

1. **有限开区間** : $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$
2. **有限半开区間** : $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ とか $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$
3. **有限閉区間** : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
4. **無限半开区間** : $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$ とか $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$
5. **無限半閉区間** : $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$ とか $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$
6. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

1.1.4 関数

- **関数** : D, R を $\mathbb{R}$ の部分集合と想定する.

集合 D から集合 R への**関数** $f: D \rightarrow R$ とは?

D を**定義域**, R を**終域** (または**値域**), $\{f(x); x \in D\}$ を**値域** (または**像**) とよぶ.
二つの関数 $f, g: D \rightarrow R$ について

$$\forall x \in D, f(x) = g(x)$$

が成立するとき, f と g は**等しい**といい, $f = g$ で表す.

$f: D \rightarrow R$ が

$$f(x) = f(y) \implies x = y$$

をみたすとき, **単射** (一対一) であるという. また

$$\forall y \in R, \exists x \in D \text{ s.t. } f(x) = y$$

をみたすとき, **全射** (上への関数) であるという.

全射かつ単射のとき, **全単射**という.

1.1.5 合成関数

- $f: D \rightarrow S, g: S \rightarrow R$ に対し,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

で定義される関数 $g \circ f: D \rightarrow R$ を, f と g の**合成関数**という.

- **例** : $g(x) = x^3, f(u) = \frac{1}{3}u + 1$ とすると, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$ となる.

1.1.6 逆関数

- $f: D \rightarrow R$ を全単射とする。このとき

$$\forall y \in R, \exists! x \in D, \text{ s.t. } f(x) = y$$

が成り立つ（ここで $\exists!$ は一意的に存在することを意味する）。この y に対して一意に決まる x を対応させる写像を f の逆関数といい、

$$f^{-1}: R \rightarrow D$$

で表す。

- **例：** $x \in [0, \infty)$ に対し x^2 を対応させる関数 $y = f(x) = x^2$ は $[0, \infty)$ への全単射。その逆関数は $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ 。

● 演習問題 1.1 (p.5)：すべてを解答せよ！

1.2 数列と極限值

1.2.2 収束の厳密な定義

- **数列の収束：** 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ s.t. } \forall n > N, |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つとき、 $\{a_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に**収束**するといい、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

で表す。

例： $a_n = 1/n$ とすると $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。

- **数列の発散：** $\{a_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束しないとき、

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ s.t. } \forall N > 0, \exists n > N, |a_n - \alpha| \geq \varepsilon$$

が成り立つ。任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束しないとき、 $\{a_n\}$ は**発散**するという。

例： $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ は発散する。

- **無限に発散**：発散のうち、

$$\forall K > 0 \text{ (または } < 0), \exists N \text{ s.t. } \forall n > N, a_n > K \text{ (または } < K)$$

が成り立つとき、 $\{a_n\}$ は $+\infty$ ($-\infty$) に発散するといひ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \quad \text{または} \quad a_n \rightarrow \pm\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

で表す。

例： $a_n = 2n$ とすると $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$)。

演習：数列 $\{a_n\}$ が無限大に発散するとき発散することを、定義に基づいて証明せよ。

1.2.3 収束に関する諸定理

- **定理 1.2**：

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0.$

2. 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がいずれも収束するとする。このとき

$$\forall n, a_n \leq b_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

3. 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がいずれも α に収束するとする。このとき

$$\forall n, a_n \leq c_n \leq b_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha.$$

証明：講義で解説！

□

- **定理 1.3**：収束する数列は有界。

証明：講義で解説！

□

- **定理 1.4**： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とする。

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \alpha + \mu \beta.$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$

3. $\beta \neq 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

証明：講義で解説！

□

- **例 1.7**：

1. $a_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$ ならば $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \alpha$
2. $a_{n+1} - a_n \rightarrow \beta (n \rightarrow \infty)$ ならば $\frac{a_n}{n} \rightarrow \beta (n \rightarrow \infty)$
3. $a_n > 0$ かつ $a_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$ ならば $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$
4. $a_n > 0$ かつ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$ ならば $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$

証明：最初の主張を講義で解説！

1.2.4 単調増加・減少数列

- **数列の有界性：**数列 $\{a_n\}$ について、

$$\exists K \text{ s.t. } \forall n, a_n \leq K$$

をみたすとき、 $\{a_n\}$ は**上に有界**という。

不等号の向きを変えて、**下に有界**が定義される。

- **単調数列：**数列 $\{a_n\}$ が、

$$\forall n, a_n \leq a_{n+1}$$

をみたすとき、数列 $\{a_n\}$ は**単調増加**であるという。

不等号の向きを逆にして**単調減少**が定義される。

- **定理 1.5：**

1. 上に有界な単調増加数列は収束する。
2. 下に有界な単調減少列は収束する。

証明：1について、実数の連続の公理により $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ の上限が存在する。それを α とおき、これが極限であることを示す。□

- **例 1.8：** $a_n = (1 + 1/n)^n$ のとき、 $\{a_n\}$ は収束する。収束先を $e = 2.714567 \cdots$ で表し、ネイピア (Napier) 数とよぶ。

証明：単調増大数列であることを示す。□

1.2.5 区間縮小法

- **定理 1.6** : 閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ の列 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ が,

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n \supset I_{n+1} \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$$

をみたすとする. このとき $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ はただ 1 点からなる.

証明 : 講義で解説! □

1.2.6 部分列

- **部分列** : 自然数の増加列 $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ に対し, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列という.

α に収束する数列の任意の部分列は α に収束する. また, 発散する数列が収束する部分列を含む場合がある.

- **定理 1.7 (ボルツァノ・ワイエルシュトラス)** : 有界な数列は収束する部分列をもつ.

証明 : 講義で解説! □

1.2.7 コーシー列

- **コーシー列の定義** : コーシー列とは,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ s.t. } \forall n > N, \forall m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

をみたす数列のこと.

- **演習** : 収束する数列はコーシー列.

- **定理 1.8** : コーシー列は収束する.

証明 : 講義で解説! □

- **演習問題 1.2 (p.17)** : 各問の奇数番を解答せよ!

1.3 関数の極限と連続関数

1.3.2 関数の極限値の厳密な定義

- **定義** : 関数 $f : D \rightarrow R$ について,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つとき、 x が a に近づくとき $f(x)$ は A に近づくといい、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{または} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow a)$$

で表す。さらに A を x が a に近づいたときの $f(x)$ の**極限值** という。

1.3.4 極限に関する定理

- **定理 1.9** : 三つの関数 f, g, h が a を含む区間 D で定義され、 $x \in D$ ($x \neq a$) で $f(x) \leq g(x)$ とする。

1. x が a に近づくとき f, g の極限值が存在するとき。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

が成り立つ。

2. $x \in D$ ($x \neq a$) で $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ とする。このとき、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow a} h(x) \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$$

が成り立つ。

証明 : 省略!

□

- **定理 1.10** : 関数 f, g が $a \in \mathbb{R}$ の近くで定義されており、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ とする。

1. $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda A + \mu B$
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ (ただし $B \neq 0$)

証明 : 省略!

□

1.3.5 連続関数

- **定義** : 関数 $f : D \rightarrow R$ について、

$$x \rightarrow a \quad \text{ならば} \quad f(x) \rightarrow f(a)$$

をみます, すなわち

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

をみますとき, f は a で**連続**という.

定義域 D の任意の点で連続のとき, f は D で**連続**, あるいは f は D 上の**連続関数**という.

- **定理 1.11**: 同じ定義域をもつ連続関数 f, g について, つぎが成り立つ.

1. $\lambda f + \mu g$ は連続.

2. $f g$ は連続.

3. $\frac{f}{g}$ は連続.

証明: 省略! □

- **定理 1.12**: 連続関数の合成は連続.

証明: 講義で解説! □

- **定理 1.13**: 連続関数 f に対し, つぎが成り立つ.

$$f(a) > 0 \implies \exists \delta \text{ s.t. } \forall x \in (a - \delta, a + \delta), f(x) > 0$$

証明: 講義で解説! □

- **定理 1.14 (中間値の定理)**: 閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 f について, つぎが成り立つ.

$$(f(a) < 0) \wedge (f(b) > 0) \implies \exists c \in [a, b] \text{ s.t. } f(c) = 0$$

証明: 講義で解説! □

- **定理 1.15 (ワイエルシュトラスの定理)**: 閉区間で定義された連続関数は, 最大値および最小値を取る.

証明: 講義で解説! □

1.3.6 逆関数

- **定義**：関数 f は,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

をみたすとき, **単調増大**であるという.

等号付き不等号から等号除いて**狭義単調増大**が定義される.

また不等号の向きを変えて**単調減少**および**狭義単調減少**が定義される.

- **定理 1.16**: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続狭義単調増加関数ならば, $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ が定まり, 連続狭義単調増加関数となる.
減少の場合も同様の事実が成り立つ.
証明: 講義で解説! □

- **演習問題 1.3 (p.27)**: 問 1, 3, 4 を解答せよ!

1.4 初等関数

1.4.1 三角関数と逆三角関数

- **定義 (三角関数)**: 単位円上の点と原点がなす (退化も許す) 三角形から導出される実数を, 単位上の点を弧度 (ラジアン) で径数付けして関数とみなす.

$$\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta, \cot \theta = 1/\tan \theta, \sec \theta = 1/\cos \theta, \operatorname{cosec} \theta = 1/\sin \theta$$

は $\mathbb{R}$ で定義された関数となる.

- **定理 1.18**:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- **証明**: 講義で解説! □

- **定義 (逆三角関数)**:

$$\arcsin \theta = \sin^{-1} \theta, \quad \arccos \theta = \cos^{-1} \theta, \quad \arctan \theta = \tan^{-1} \theta$$

の値域は, それぞれ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[0, \pi]$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

1.4.2 指数関数と対数関数

- **定義 (指数関数)**: $a > 0$ のとき, a の自然数 n に対して n 乗を $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n 個), 負の整数 n に対して n 乗を $a^n = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a}$ (n 個), 有理数 n/m ($m > 0$) に対して n/m 乗を $a^{n/m} = (\sqrt[m]{a})^n$ で定義すると, a^x ($x \in \mathbb{Q}$) は $\mathbb{R}$ 上の連続関数として一意的に拡張できる. この関数を a^x で表し, **指数関数** とよぶ.
 $a \neq 1$ のとき, 指数関数 a^x は狭義単調.

- **定義 (対数関数)**:

$a > 0, \neq 1$ のとき a^x の逆関数を $\log_a x$ で表し, a を底とする**対数関数**という. すなわち

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

をみます.

$a = e$ のとき, $\log_e x$ を $\log x$ で表し**自然対数**とよぶ.

- **定理 1.19**:

1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

証明: 最初の主張を講義で解説! □

1.4.3 双曲線関数と逆双曲線関数:

- **定義**: 双曲線関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

逆双曲関数

$$\operatorname{arsinh} x = \sinh^{-1} x, \quad \operatorname{arcosh} x = \cosh^{-1} x, \quad \operatorname{artanh} x = \tanh^{-1} x$$

各々の定義域と値域を確認せよ!

- **演習問題 1.4 (p.34)**: 各問の奇数番を解答せよ!

6 級数

6.4 関数項級数

6.4.1 一様ノルム

- **定義 (一様ノルム)** : $D \subset \mathbb{R}$ で定義された関数 $f(x)$ に対し,

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

を一様ノルムとよぶ.

$\|f\| < \infty$ であることは, 関数 $f(x)$ が区間 D 上で有界であり, $|f(x)|$ の上限が $\|f\|$ で与えられていることを意味する.

- D で定義された二つの関数 $f(x), g(x)$ に対して,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x) \quad (c \in \mathbb{R})$$

により, 関数同士の和 $f + g$ とスカラー倍 cf が定義される.

- **定理 6.16** :

1. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
2. $\|cf\| = |c|\|f\|$
3. $\|f\| \geq 0$ かつ等号が成立するのは $f \equiv 0$ のときに限る.

証明 : 講義で簡単に説明!

6.4.2 関数列

- D 上の関数 $f_n(x)$ ($x \in D$) ($n = 1, 2, \dots$) よりなる列を D 上の関数列といい, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 等で表す.
- **定義 (関数列の各点収束)** : $x = x_0$ を固定したとき $\{f_n(x_0)\}$ が収束するとき, $\{f_n(x)\}$ は $x = x_0$ で収束するという.
 D のすべての点で $\{f_n(x)\}$ が収束するとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ は D 上の関数となる. これを $f(x)$ で表すとき, 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に各点収束するという.

- **例** : $f_n(x) = x^n$ としたとき, $[0, 1]$ で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ は

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \text{ のとき} \\ 1, & x = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

に各点収束する.

- **定義 (関数列の一致収束)** : I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

をみたす関数 $f(x)$ が存在するとき, $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に一致収束するという.

一致収束先は $\|\cdot\|$ の性質 3 により一意的.

$\varepsilon - \delta$ 論法による定義.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ s.t. } \forall n > N, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

- **定理 6.17** : 関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に一致収束すれば, $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に各点収束する.

証明 : 明らか.

- **演習** : 上記の各点収束する例は一致収束していないことを確かめよ (教科書参照).

- **定理 6.18** : $\{f_n(x)\}$ を $D \subset \mathbb{R}$ 上の連続関数列とし, さらに $f(x)$ に一致収束しているとする. このとき $f(x)$ は D で連続である.

証明 : 講義で解説!