微分積分学第一 N組　第 0 章

Last Update on April 9, 2014

0　準備

0.0　教科書・参考書について

- **教科書：**浦川肇著「微積分学の基礎」，朝倉書店，2006 年

  1. **特徴：**微分積分学の理解を深めるための豊富な例題・演習問題と丁寧な解答がある．講義・演習で不足する説明を自力で補うのにたいへん助けになる．
  2. **その他：**誤植，および術語の表記について必ずしも講義と一致しない箇所があるが，過度に神経質にならないこと．

- **お奨め参考書：**

  1. 渡辺治・北野晃朗・木村泰紀・谷口雅治著「数学の言葉と論理」，朝倉書店，2008 年
  2. 黒田成俊著「微分積分」．共立出版，2002/09 年
  3. 高木貞治「定本 解析概論」，岩波書店，2010 年

0.1　命題論理

- **Pproposition（命題）：**正しいか誤っているか（真偽）がはっきりした主張（論理式）．
  例：「7 は素数」とか「7 は 2 で割り切れる」など
  命題の真偽： 前者は真で，後者は偽，いずれも数学的な真偽を判定する基準（定義）があるので，立派な命題．

論理学では命題が真か偽かを，True (T または 1）および False (F または 0) で表示する．

- **And（連言）：**二つの命題 P, Q を「かつ」で結んだ命題で，$P \wedge Q$ であらわす．その真偽は，定義により以下の真偽表（真理値表）にしたがう．

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- **Or（選言）：**二つの命題 P, Q を「または」で結んだ命題で，$P \vee Q$ で表す．この真偽表は

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- **Not（否定）：**命題 P に対し「P でない」という命題で，$\neg P$ で表す．真偽表は

P	$\neg P$
T	F
F	T

- **Implication（含意）：**$P \to Q$ で表される命題で，その真偽は，

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

で定義される．

例： たとえば入試で「満点 $\to$ 合格」という含意命題に対して，受験生各々を対象にして命題の真偽の意味を確認すると，満点とって合格したら含意成立，満点とって不合格なら含意は成立しない，満点をとれなかった場合，結果がどうであれ含意は否定されたことにはならない．したがってこの場合「$\to$」を「ならば」と読むと，大体普通の感覚に一致する．

一方，$P \to Q$ は命題であり真偽が問われ，勝手な P と Q を選び $\to$ を「ならば」と読むと妙な日本語になる．たとえば「7 は 2 で割り切れる」ならば「7 は素数」など．

約束： 本講義では $P \to Q$ を「P 矢印 Q」と読む．

- **同値（equivalent）な命題：** 真偽表の等しい命題は同値とよび，$\iff$ で結ぶ．

- **命題の書き換えルール：**

  1. 結合法則
  $$(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R),\ \cdots$$
  2. 分配法則
  $$(P \wedge Q) \vee R \iff (P \vee R) \wedge (Q \vee R),\ \cdots$$
  3. 交換法則
  $$P \wedge Q \iff Q \wedge P, \qquad P \vee Q \iff Q \vee P$$
  4. 二重否定
  $$\neg\neg P \iff P$$
  5. ド・モルガンの法則
  $$\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q, \qquad \neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$$

- **演習：** 上のルールの 1, 2, 5 について，両辺を真偽表が一致することを確かめよ！

0.2 真の命題を根拠にした推論

- **推論（inference）：** P が真であれば Q が真となるとき，P を Q に置き換える操作（$P \Rightarrow Q$ で表す）．
  真偽表で P が T のとき Q が T となることと同じであり,「$\Rightarrow$」 を「ならば」と読

むと日本語としてしっくり来るので，

約束：$P \Rightarrow Q$ を，P ならば Q と読む．

双方向に推論できるとき $\Longleftrightarrow$ で結ぶ．このとき両命題の真偽表が一致し，両者は同値となり，$\Longleftrightarrow$ という記号が整合性をもつ．

- **定理：**$P \to Q \iff \neg P \vee Q$

  演習： 右の命題の真偽表を作成し，左の命題の真偽表と比較せよ．

- **定理：**$P \wedge (P \to Q) \Longrightarrow Q$

  証明： 真偽表は

P	Q	$P \to Q$	$P \wedge (P \to Q)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	F

  となる． □

- **背理法の原理：**$P \to Q \iff \neg Q \to \neg P$

  証明：論理式を真偽が等しい論理式に置き換え計算していくと，

$$\begin{aligned} \neg Q \to \neg P &\Longleftrightarrow \neg\neg Q \vee \neg P \\ &\Longleftrightarrow Q \vee \neg P \\ &\Longleftrightarrow \neg P \vee Q \\ &\Longleftrightarrow P \to Q \end{aligned}$$

  となる． □

- **三段論法の原理：**$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Longrightarrow (P \to R)$

証明：論理式を真偽不変な置き換えおよび推論で計算していくと,

$$\begin{aligned}(P \to Q) \wedge (Q \to R) &\iff (\neg P \vee Q) \wedge (Q \to R) \\ &\iff (\neg P \wedge (Q \to R) \vee (Q \wedge (Q \to R)) \\ &\implies (\neg P \wedge (Q \to R)) \vee R \\ &\iff (\neg P \vee R) \wedge ((Q \to R) \vee R) \\ &\implies \neg P \vee R \\ &\iff P \to R\end{aligned}$$

となる. □

- 含意命題 $P \to Q$ に対し
  逆命題（converse）： $Q \to P$ （Q 矢印 P）,
  裏命題（inverse）： $\neg P \to \neg Q$（P でないとき矢印 Q でない）.
  対偶命題（contraposition）： $\neg Q \to \neg P$（Q でないとき矢印 P でない）.

- **演習：**含意命題，その逆命題，裏命題，対偶命題の真偽表を比較せよ！

- **演習：**四つの命題すべてが真となる P と Q の例を挙げよ！

- **必要（necessary）条件，十分（sufficient）条件：**
  $P \implies Q$ のとき,
  P は Q であるための十分条件,
  Q は P であるための必要条件.
  さらに同時に $Q \implies P$ のとき，P は Q であるための必要十分条件.
  このとき P と Q は同値である.

- **演習：**P が Q であるための必要条件であって十分条件でない P, Q の例，十分条件であって必要条件でない P, Q の例，必要十分条件となる P, Q の例を具体的に挙げよ！

0.3 述語論理

- **述語（predicate）：**変数 x に何かを代入すると命題になる論理式.
  例：入試での「x は満点」という述語論理式に $x =$ 数学，英語，物理，化学などを代入すると命題になる.

- **量化記号（quantifier）：**
  全称命題（universal proposition）：$\forall x\, P(x)$
  $P(x)$ が上の例の場合「すべての科目が満点」という命題.
  もちろんこれは命題で，真あるいは偽を主張するものではない！
  全称命題を論理式を使わず英文表記すると

  P(x) for all x.

  と順序が変わる．このため $P(x)\,(\forall x)$ 等と記すことが多々ある.
  存在命題（existential proposition）：$\exists y\, P(y)$
  $P(y)$ が上の例の場合「ある科目が満点」という命題.
  これも命題で，真あるいは偽を主張するものではない！
  存在命題を英文表記すると

  There exists y such that P(y).

  となるので，$\exists y\ s.t.\, P(y)$ と記すことが多々ある.

- **定理：**

  1. $\neg(\forall x\, P(x)) \iff \exists x(\neg P(x))$
  2. $\neg(\exists x\, P(x)) \iff \forall x(\neg P(x))$

  証明：参考書参照！
  例：前者は，任意の x について $P(x)$ が成立するわけではない，という命題が，ある x については $P(x)$ が成り立たない，という命題と同値であることを主張している．
  たとえば，x は整数を表す変数として $P(x)$ を「x は偶数である」という命題とすると，左辺は日本語の文章として,

  任意の整数が偶数というわけではない

  と表現でき，また右辺は,

  偶数ではない整数がある

と表現できる．我々は 1 という偶数でない整数の存在を知っているから，双方正しい命題であることが確認できる．

- $\varepsilon - \delta$ **論法：**関数 $y = f(x)$ が与えられたとする．実数 a を一つ固定し，2 変数 ε, δ についての推論を含む論理式 $P(\varepsilon, \delta)$ を

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

とする．$\varepsilon - \delta$ 論法の論理式は

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta\, P(\varepsilon, \delta)$$

である．この量化記号を含む推論が真のとき（正しいとき），$y = f(x)$ は $x = a$ で連続という．この意味を理解するのが講義の最大のテーマ．

- **複数の量化記号を含む論理式の読み方：**量化記号は順番が重要で，前から順番に状況が決まっていくと解釈する．上記の

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta$$

は，δ は ε に無関係ではなく，教科書のキャッチボールによる説明にあるように，

ε が投げられたら δ で打ち返す

と理解すると分かりやすい．ε の投げられ方が分からないのに加え，仮に投げられた ε が分かっていたとしても δ の選択は多様である．そのことを確認するため演習（現時点では多分難問）を以下に記す．

- **演習：**

  1. 関数 $y = x$ が $x = 0$ において連続であることを，$\varepsilon - \delta$ 論法を使って示せ．
  2. 関数 $y = x$ が $x = a$ において連続であることを，$\varepsilon - \delta$ 論法を使って示せ．
  3. 関数 $y = x^2$ が $x = 0$ において連続であることを，$\varepsilon - \delta$ 論法を使って示せ．
  4. 関数 $y = x^2$ が $x = a$ において連続であることを，$\varepsilon - \delta$ 論法を使って示せ．

- **複数の量化記号を含む命題の否定：**$\varepsilon - \delta$ 論法に現れる論理式の否定は

$$\begin{aligned}\neg(\forall \varepsilon\, \exists \delta\, P(\varepsilon, \delta)) &\iff \neg(\forall \varepsilon\, (\exists \delta\, P(\varepsilon, \delta))) \\ &\iff \exists \varepsilon\, (\neg(\exists \delta\, P(\varepsilon, \delta))) \\ &\iff \exists \varepsilon\, \forall \delta\, (\neg P(\varepsilon, \delta))\end{aligned}$$

となり，量化記号が反転する．

- **演習：**

  1. 関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で連続でないことを，この否定命題にしたがって日常使う言葉で表現せよ！
  2. つぎの関数が $x=0$ で連続でないことを $\varepsilon-\delta$ 論法で証明せよ．

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

0.4　記号等の約束

- **集合（set）：**特定できる対象の集まり．対象を中括弧 $\{\ \}$ で括って表す．たとえば $\{1,\,2,\,3\}$ のように要素を列挙することもあるが，たいていは述語 $P(x)$ を使って

$$A=\{x\,;\,P(x)\}$$

  と表す，ここで A は $P(x)$ が真となるような x すべての集まりである．
  例：$\{x\,;\,0\le x\le 1\}$ とか，$\{y\,;\,y$ は負の有理数$\}$ である．集合の要素は数である必要はなく，$\{(x,y)\,;\,x+y=1\}$ や，$\{(x,y)\,;\,x,\,y\le 0,\,x+y\le 1\}$ など，あるいは $\{\{1,2\},3\}$ などの集合を要素とする集合もありうる．

- **集合の演算：**

  1. 要素：$x\in A$ または $A\ni x$
  2. 空集合：$\emptyset$
  3. 部分集合；$A\supset B$ または $B\subset A$
  4. 共通部分：$A\cap B=\{x\,;\,(x\in A)\wedge(x\in B)\}$
  5. 和集合：$A\cup B=\{x\,;\,(x\in A)\vee(x\in B)\}$
  6. 差集合：$A\backslash B=\{x\,;(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$

- **数の集合の記号：**
  $\mathbb{N}=\{1,\,2,\,3,\,\cdots\}$：自然数の集合．
  $\mathbb{Z}$：整数の集合．
  $\mathbb{Q}$：有理数の集合．
  $\mathbb{R}$：実数の集合（実数が何であるかは後に解説する）．
  $\mathbb{C}=\{z=x+i\,y\,:\,x\,,\,y\in\mathbb{R}\}$：複素数の集合．

- **DTP スタイル**：数学では

    1. 定義（definition）
    2. 定理（theorem）
    3. 証明（proof）

  という順序で主張を展開するスタイルが確立されている.

- **数学的命題の表題**：重要度や他の命題との関係に応じて

    1. 補題（lemma）
    2. 命題（proposition）
    3. 定理（theorem）
    4. 系（corollary）

  などが冠される.

- **ギリシャ文字**：理学ではギリシャ文字を多用する.

  α（アルファ）
  β（ベータ）
  γ（ガンマ）
  δ（デルタ）
  ε（イプシロン）
  ζ（ゼータ）
  η（イータ）
  θ（セータ）
  ι（イオタ）
  κ（カッパ）
  λ（ラムダ）
  μ（ミュー）
  ν（ニュー）

ξ（クシー）

π（パイ）

ρ（ロー）

σ（シグマ）

τ（タウ）

υ（ウプシロン）

φ（ファイ）

χ（カイ）

ψ（プサイ）

ω（オメガ）