

微分: 一変数

$y = f(x)$  が  $x = x_0$  で微分可能

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{f(x_0 + h) - f(x_0)\}$  が存在するとき.

$f'(x_0)$  微分係数

$\frac{1}{h} \{f(x_0 + h) - f(x_0)\} - f'(x_0) = \varepsilon(h)$  とおくと.

$\varepsilon(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) である

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \varepsilon(h)h$$

↳ 上の定義式でおきかえる(可能  
あり)

定理 1 (P.36)

$y = f(x)$  が  $x = x_0$  で微分可能

$\iff \exists A \in \mathbb{R}$  s.t.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

とかけると,  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) となる.

定理 1 (P.36)

$y = f(x)$  が  $x = x_0$  で微分可能

割り算がない。

$\iff \exists A \in \mathbb{R}$  s.t.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

とかけず,  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) となる。

証明) ( $\implies$ ) 済。  $A = f'(x_0)$ .

( $\impliedby$ ) 仮定をみたしているとする。

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon \rightarrow A$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) より  $x = x_0$  で微分可能 //

$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \{ f(x_0 + h) - f(x_0) \}$ : 右微分係数  
左 " "

$f$  が区間  $I$  で微分可能  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in I$  で微分可能。

# 導関数の公式 (p.38)

1° 四則公式

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

⊙  $f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$  を考えよ.

$$\text{一方, } f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x \quad (\varepsilon_1 \rightarrow 0 \text{ } (\Delta x \rightarrow 0) \text{ 定理1})$$

$$g(x+\Delta x) - g(x) = g'(x)\Delta x + \varepsilon_2 \Delta x \quad (\varepsilon_2 \rightarrow 0 \text{ } (\Delta x \rightarrow 0))$$

$$\text{よって, } \text{---} = (f(x) + \underbrace{f'(x)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x}_{(f' + \varepsilon_1)\Delta x})(g(x) + g'(x)\Delta x + \varepsilon_2 \Delta x) - f(x)g(x)$$

$$= \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} \Delta x + \underbrace{(f'(x) + \varepsilon_1)(g'(x) + \varepsilon_2) \Delta x \cdot \Delta x}_{\text{の値を } \varepsilon_3 \text{ とおくと}} + (f(x)\varepsilon_2 + g(x)\varepsilon_1)\Delta x$$

$$= \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} \Delta x + \varepsilon_3 \Delta x$$

とかけると,  $\varepsilon_3 \rightarrow 0 \text{ } (\Delta x \rightarrow 0)$  である.

よって **定理1より**  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) //$

$f/g$  も同様。」

2° 合成関数.

$y = f(x) : x = x_0$  で微分可能

$z = g(y) : y = f(x_0)$  で微分可能とする.

$\Rightarrow z = g(f(x))$  も  $x = x_0$  で微分可能で

$$\frac{dz}{dx} = g'(f(x_0))f'(x_0) \text{ とわかる.}$$

$\therefore$   $g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))$  を考える.

$$\text{仮定より, } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x$$

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \varepsilon_2\Delta y \quad (y_0 = f(x_0))$$

$$\text{~~~~} = g(\underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x}_{\Delta y \text{ とおく.}}) - g(\underbrace{f(x_0)}_{y_0})$$

$$= g'(y_0)(f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x) + \varepsilon_2(f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x)$$

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \varepsilon_2 \Delta y \quad (y_0 = f(x_0))$$

$$\sim = g(\underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x}_{\Delta y \text{ とおく}}) - g(\underbrace{f(x_0)}_{y_0})$$

$$= g'(y_0)(f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x) + \varepsilon_2(f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x)$$

$$= g'(y_0)f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1 g'(y_0)\Delta x + \varepsilon_2 f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_2 \varepsilon_1 \Delta x$$

$\rightarrow 0 \ (\Delta x \rightarrow 0)$      $\begin{matrix} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \varepsilon_2 \rightarrow 0 \end{matrix}$      $\begin{matrix} \rightarrow 0 \\ (\Delta x \rightarrow 0) \end{matrix}$

よって **定理 1** より,  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$  //

$y = f(x)$  が  $x = x_0$  で微分可能

$$\Leftrightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\Delta x \text{ の一次式}} + \underbrace{\varepsilon \Delta x}_{\varepsilon \rightarrow 0 \ (\Delta x \rightarrow 0)}$$

$\leadsto$  "local  $\kappa$ "  $\Delta x$  の一次式近似

$\Delta x \rightarrow 0$  のとき  
一次より速く 0  
 $\kappa$ -1/2 部分.

### 3° 逆関数の微分

$y = f(x)$ : 狭義単調,  $x = x_0$  で微分可能で  $f'(x_0) \neq 0$   
とす。  $\Rightarrow x = f^{-1}(y)$ : 逆関数も  $y_0 = f(x_0)$  で  
微分可能で, 微分係数は  $1/f'(x_0)$  である。

$$\odot \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon\Delta x$$

$$\therefore \Delta x = f'(x_0)^{-1}\Delta y - \varepsilon \cdot \frac{\Delta x}{f'(x_0)}$$

$$= f'(x_0)^{-1}\Delta y - \frac{\varepsilon}{f'(x_0)} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \Delta y$$

$\xrightarrow{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'(x_0)^{-1} (\Delta y \rightarrow 0) //$

$\downarrow$   
 $0 (\Delta y \rightarrow 0)$

4° 媒介変数  $t$  による微分

$x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  で,  $\varphi$  は単調,  $\varphi'(t) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d\psi/dt}{d\varphi/dt} \quad \text{と} \quad \text{ら} \quad \text{ら}.$$

$$\therefore \Delta x = \varphi'(t)\Delta t + \varepsilon_1\Delta t, \quad \Delta y = \psi'(t)\Delta t + \varepsilon_2\Delta t$$

3° を使う ( $x$  と  $t$  間)

$$\Delta t = \varphi'(t)^{-1}\Delta x + \varepsilon_3\Delta x \quad \text{と} \quad \text{ら} \quad \text{ら}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta y &= \psi'(t)(\varphi'(t)^{-1}\Delta x + \varepsilon_3\Delta x) + \varepsilon_2(\varphi'(t)^{-1}\Delta x + \varepsilon_3\Delta x) \\ &= \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\Delta x + \underbrace{(\psi'(t)\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varphi'(t)^{-1} + \varepsilon_2\varepsilon_3)}_{\rightarrow 0 \ (\Delta x \rightarrow 0) \ //} \Delta x \end{aligned}$$

# 偏微分 (P.161)

$z = f(x, y) : P_0(a, b)$  の近傍で定義

$\rightarrow y = b$  と固定する  $\rightarrow f(x, b)$  は  $x$  のみの関数

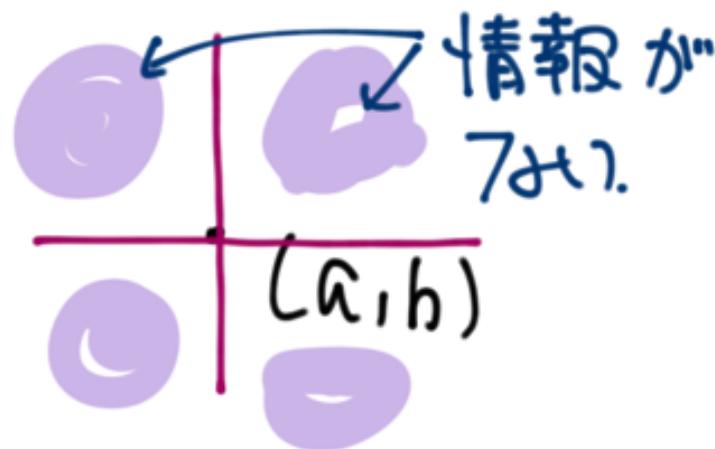
$\rightarrow f(x, b)$  を  $x$  で微分する  $\rightarrow$  偏微分 という

記号:  $f_x, f_y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  を使う

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ f(a+h, b) - f(a, b) \}$$

$$f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ f(a, b+h) - f(a, b) \}$$

偏微分  
 $\rightarrow$  かたよっていう



$$f(x+h) = f(x) + Ah + \varepsilon h \quad \varepsilon \rightarrow 0 \ (h \rightarrow 0)$$

$$\rightsquigarrow f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \vec{A} \cdot \vec{h} + \varepsilon |\vec{h}| \quad \varepsilon \rightarrow 0 \ (|\vec{h}| \rightarrow 0)$$

$\vec{A}$  と  $\vec{h}$  の内積.

ある定ベクトル  $\vec{A}$  が存在して,

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \vec{A} \cdot (h, k) + \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2}$$

とかけると,  $\varepsilon \rightarrow 0 \ (h^2 + k^2 \rightarrow 0)$  とする.

このとき  $f$  は  $(a, b)$  で **全微分可能** という.