

復習:

- 有界な単調列は収束する.
- $\{a_n\}$, $|a_{n+1}/a_n| \rightarrow c$ ($n \rightarrow \infty$) とする.
このとき, $0 \leq c < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$
 $c > 1 \Rightarrow |a_n| \rightarrow \infty$.
- $\{a_n\}$: 有界 $\Rightarrow \{a_n\}$ の部分列で収束するものがとれる.

P. 154

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$: 平面

$P(x, y), Q(x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

$\uparrow P, Q$ 間の距離.

距離の公理

(1) $d(P, Q) \geq 0$ かつ $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

(2) $d(P, Q) = d(Q, P)$

(3) $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$

を証明する。

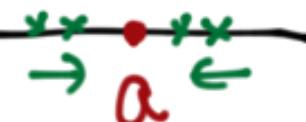
$\mathbb{R}^2 \ni \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $P_n \rightarrow P$ ($n \rightarrow \infty$)
を定義する.



$\forall \varepsilon > 0$ ~~ある~~ しても

$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N$ ならば $d(P_n, P) < \varepsilon$.

註 1次元



2次元



$\{P_n\}$ が 有界

(0,0)

$\xleftarrow[\text{def}]{\quad} \exists M > 0, d(O, P_n) < M \ (n=1, 2, \dots)$

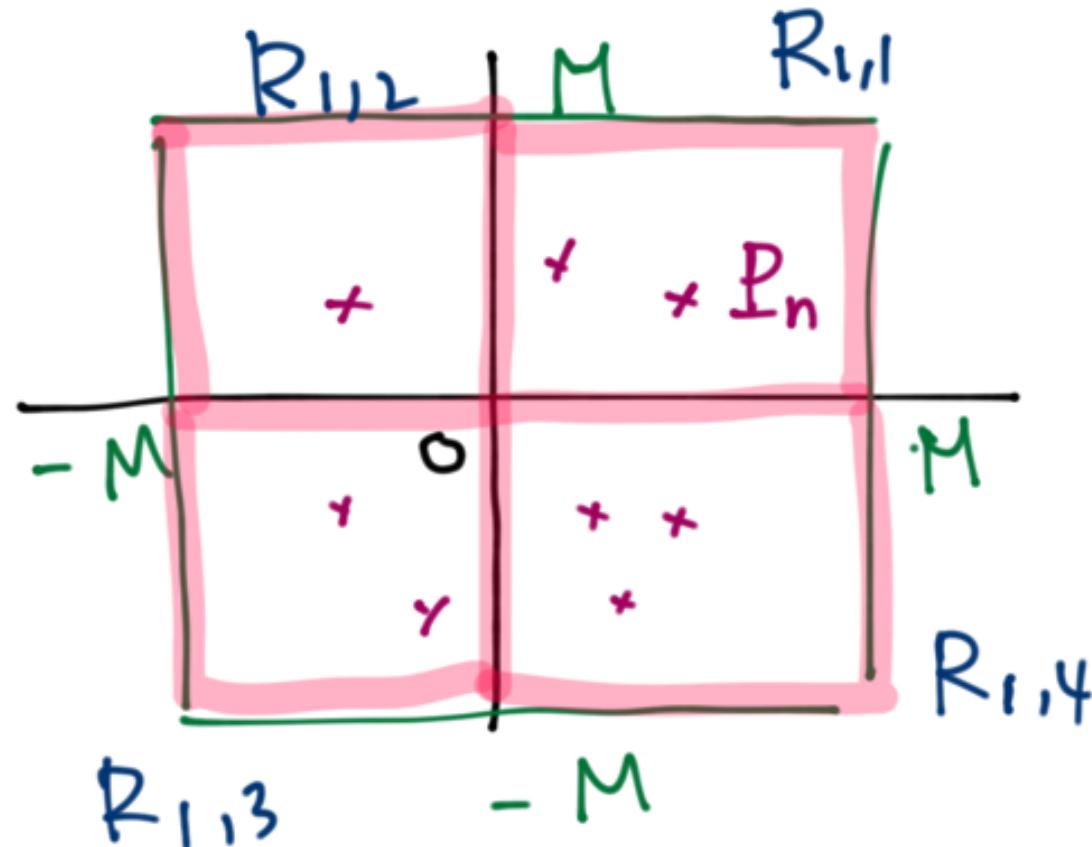
定理1

$\{P_n\}$: 有界 \Rightarrow 収束する部分列がある.

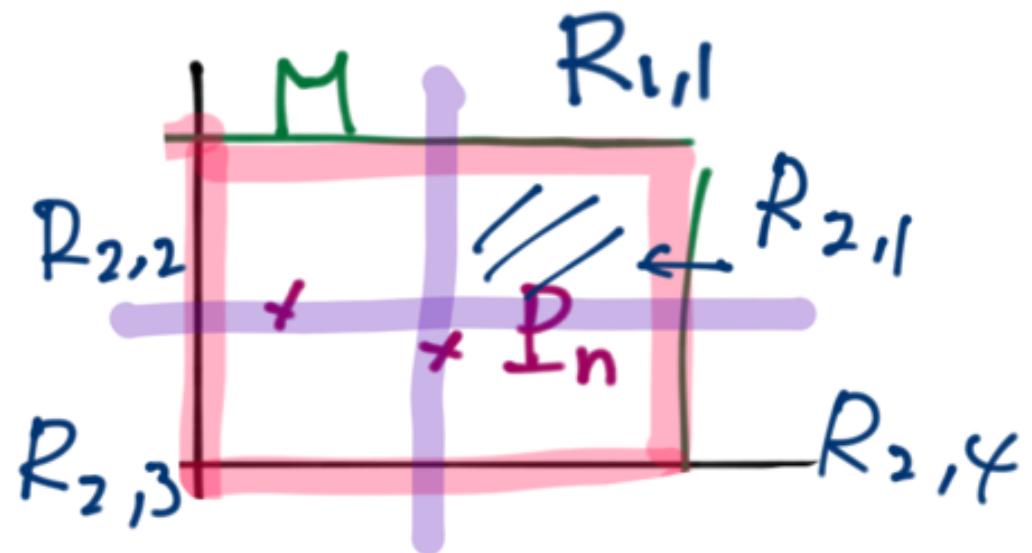
定理1

$\{P_n\}$: 有界 \Rightarrow 収束する部分列がある。

証明

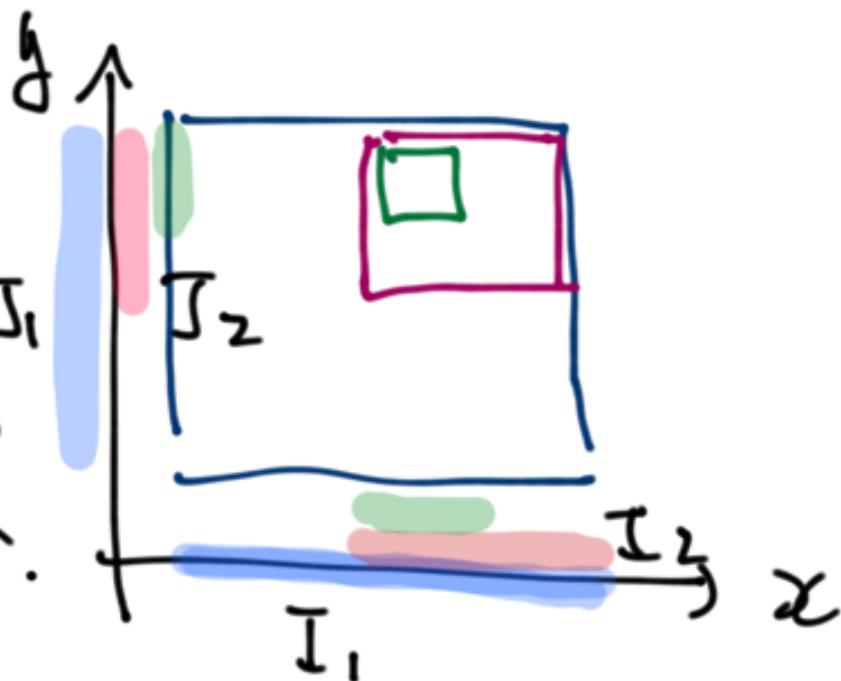


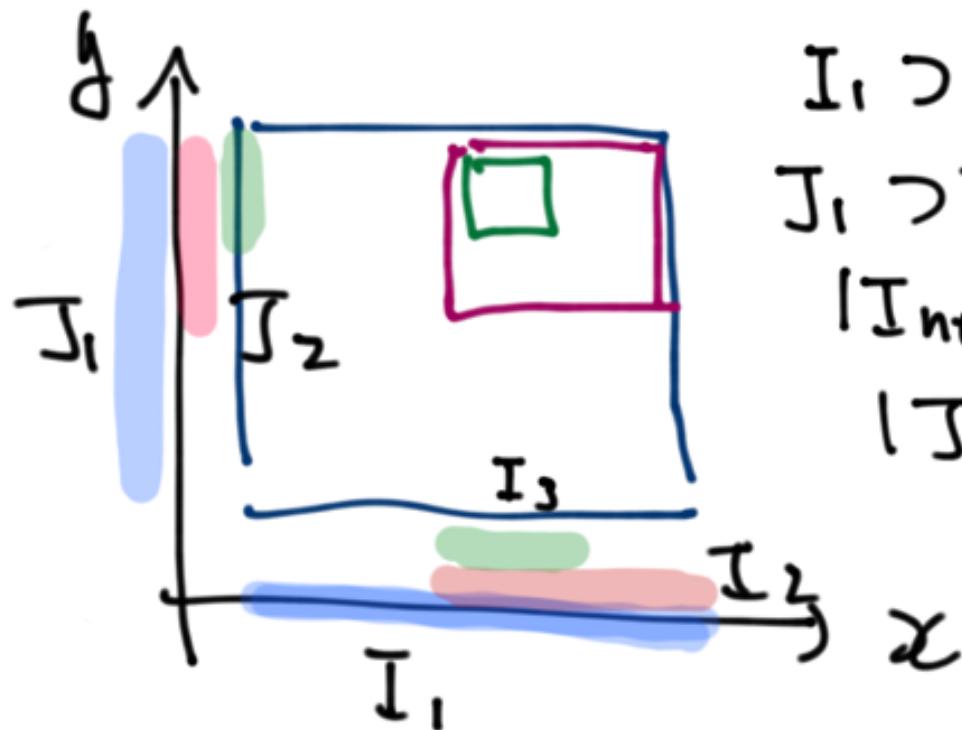
少なくともひとつ $R_{1,i}$ ($i=1, \dots, 4$) には無限個の $\{P_n\}$ が含まれる。 $\rightarrow R_{1,1}$ とする。



$R_{2,i}$ ($i=1, \dots, 4$) のうち少なくともひとつは無限個の $\{P_n\}$ が含まれる. \rightsquigarrow 以下 この操作を続ける.

$R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n$
 $\cap R_{n+1} \cap \dots \cap J_1$
 s.t. R_{n+1} は R_n の
 四等分のどれか.





$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$$

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots$$

$$|I_{n+1}| = \frac{1}{2} |I_n|$$

$$|J_{n+1}| = \frac{1}{2} |J_n|$$

$Q_n(x_n, y_n) \cdot \{P_n\}$ の部分 \exists で $\in R_n$

$\Leftrightarrow x_n \in I_n, y_n \in J_n$

$x_n \rightarrow {}^{\exists}x, y_n \rightarrow {}^{\exists}y \quad (n \rightarrow \infty)$
 (先進と同じ理由)

$\therefore P_n \rightarrow Q(x, y).$

(III) 基本列 (P.12, P.156)

$\{a_n\}, \{p_n\}$ が 収束するかどうか を判定する。
 ↳ 収束性は知らない。

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \{a_n\} \text{ or } \{p_n\} \text{ の } \underline{\text{移動距離}} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \\ &\times a_n = \sum \frac{1}{n} \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty) \quad \text{大きな號} \\ &|a_n - a_{n-1}| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \quad \text{同上} \end{aligned}$$

つまり, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$

s.t. $n, m \geq N$ のとき

$$|a_n - a_m|, d(p_n, p_m) < \varepsilon$$

↳ これで収束する数列, つまり

基本列 または カンチー (Cauchy) 列 という。

定理6

収束列 \iff Cauchy列.

証明

$$a_n \rightarrow a$$

(\Rightarrow) $P_n \rightarrow P$ ($n \rightarrow \infty$) とする.

このとき, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$d(P, P_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

たゞ, $n, m \geq N$ ならば $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$d(P_n, P_m) \leq d(P_n, P) + d(P_m, P)$$

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(\Leftarrow) $\{P_n\}$: Cauchy 列とする.

Step 1: $\{P_n\}$ は有界

Step 2: 収束する部分列 \rightarrow 収束点を P とする.

Step 3: $\{P_n\}$ 全体が P に収束する.

Step 1: $\exists M > 0$ s.t. $d(O, P_n) < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
を言いたい. $\{P_n\}$ は Cauchy 列なので

$\varepsilon = 1$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$n, m \geq N \Rightarrow d(P_n, P_m) < 1$.

$n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} d(O, P_n) &\leq d(O, P_N) + d(P_N, P_n) \leq K \\ &< \textcircled{d(O, P_N)} + 1. \end{aligned}$$

$K = \max\{d(O, P_1), \dots, d(O, P_N)\}$ とおけば
 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $d(O, P_n) \leq K + 1$.

Step 2: 前定理より, $\{P_n\}$ の部分列 $\{P_{n_k}\}$
について $\exists P \in \mathbb{R}^2$ が収束するものがとれる.

Step 3: Step 2 より, $P_{n_k} \rightarrow P$ とのべ,

$\forall \varepsilon > 0$ に付いて, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $n_k \geq N_1$

ならば $d(P, P_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\{P_n\}$ は Cauchy 列とのべ, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t.
 $n, m \geq N_2 \Rightarrow d(P_n, P_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

$d(P, P_n) \leq d(P, P_{n_k}) + d(P_{n_k}, P_n)$

$N \geq N_1, N_2$ とすれば, $n_k > N$ のとき.

$n \geq N \Rightarrow d(P, P_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ //

注 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ のときは, $d(P, P_n) \sim |a - a_n|$ で
あきかえればよい.

例16 (P.13)

$|a| < \frac{1}{2}$, $|a| + |b| \leq 1$ とする.

$f(x) = ax^2 + b$ とおく.

x_1 を $|x_1| \leq 1$ とする. $x_2 = f(x_1)$,

以下 $x_{n+1} = f(x_n) = ax_n^2 + b$ と定義する.

$\Rightarrow \{x_n\}$ は収束する. 極限は $x = f(x)$ の
 $I = [-1, 1]$ 内の唯一つの解である.

$$\begin{aligned}\because |x| \leq 1 \Rightarrow |f(x)| &= |ax^2 + b| \leq |a||x|^2 + |b| \\ &\leq |a| + |b| \leq 1\end{aligned}$$

よって, $|x_n| \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |ax_n^2 - ax_{n-1}^2|$$

$$= |a| |x_n^2 - x_{n-1}^2| = |a| |x_n + x_{n-1}| |x_n - x_{n-1}|$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Red circle}} \quad \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Purple circle}} \quad < 2|a| < 1.$$

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |\alpha x_n^2 - \alpha x_{n-1}^2|$$

$$= |\alpha| |x_n^2 - x_{n-1}^2| = |\alpha| |x_n + x_{n-1}| |x_n - x_{n-1}|$$

$$\stackrel{\wedge \frac{1}{2}}{\quad} \stackrel{\frac{n-1}{2}}{\quad} < 2|\alpha| < 1.$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq 2|\alpha| |x_n - x_{n-1}|$$

$$\cdots \leq (2|\alpha|)^{n-1} |x_2 - x_1|.$$

$\{x_n\}$ が Cauchy 列を示す。

$$|x_{n+k} - x_n| = |x_{n+k} - x_{n+k-1} + x_{n+k-1} - \cdots + x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq (2|\alpha|)^{n+k-2} |x_2 - x_1| + \cdots + (2|\alpha|)^{n-1} |x_2 - x_1|$$

$$= \{(2|\alpha|)^{n+k-2} + \cdots + (2|\alpha|)^{n-1}\} |x_2 - x_1|$$

$\{x_n\}$ が Cauchy 列を示す。

$$\begin{aligned}|x_{n+k} - x_n| &= |x_{n+k} - x_{n+k-1} + x_{n+k-1} - \cdots - \\&\quad + x_{n+1} - x_n| \\&\leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\&\leq (2|\alpha|)^{n+k-2} |x_2 - x_1| + \cdots + (2|\alpha|)^{n-1} |x_2 - x_1| \\&= \{(2|\alpha|)^{n+k-2} + \cdots + (2|\alpha|)^{n-1}\} |x_2 - x_1|\end{aligned}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} (2|\alpha|)^k \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

よし, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N$ ならば

$$\sum_{k=n}^{\infty} (2|\alpha|)^k < \varepsilon.$$

$$\therefore |x_{n+k} - x_n| < \varepsilon |x_2 - x_1| \leftarrow \text{Cauchy 列}.$$

よって. $x_n \xrightarrow{\exists} \xi$ ($n \rightarrow \infty$) $\xi \in [-1, 1]$

$x_{n+1} = f(x_n)$ で両辺 $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\xi = f(\xi).$$

よって, ξ は $x = f(x)$ の $I = [-1, 1]$ 上の解.

一意性: $\eta \in I$ 且 $x = f(x)$ の解とする.

$$|\xi - \eta| = |f(\xi) - f(\eta)| \leq 2|a| \cdot |\xi - \eta|$$

$\xi, \eta \in I$

$$0 < 2|a| < 1 \text{ すなはち},$$

$$|\xi - \eta| = 0 \quad ; \quad \xi = \eta.$$