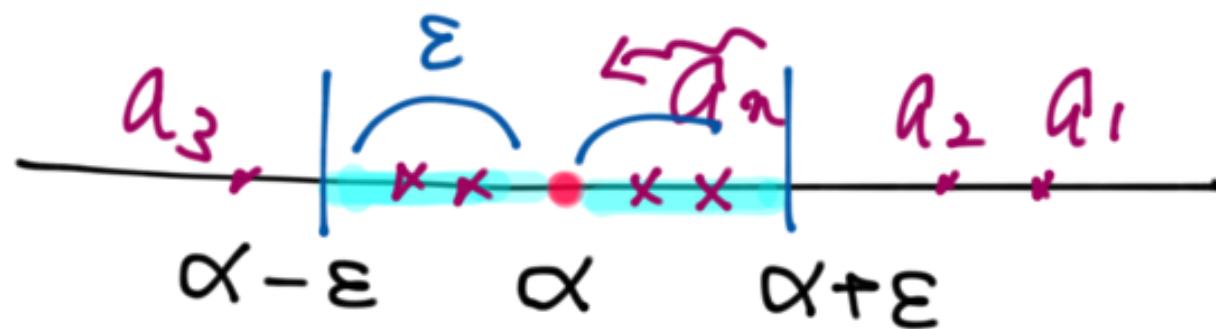


復習

- ・アルキメデスの原理: \mathbb{N} は非有界 必ず
- ・ \mathbb{Q} の稠密性: 2つの異なる実数の間に有理数が存在する。
- ・数列の収束の定義: 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束する. $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) or $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 $\overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \text{ に對して}, \exists N \in \mathbb{N} \quad \underline{\varepsilon \text{ に依存}}$
s.t. $n \geq N$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$

どう入る?



例) $A_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}\}$
 $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1].$

① $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supset [0, 1]$ かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0, 1]$ を示せば
よい.

① は明らか: $\forall x \in [0, 1]$ を考える.

$x \in A_n$ である. for $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\therefore x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0, 1]$ の証明.
②

背理法で示す. $\exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ s.t. $x \notin [0, 1]$ と仮定する.

$-\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$)
である. $x < 0$ と仮定する.

$\forall \varepsilon > 0$ に對して, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N$
 $\Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\varepsilon = -x$ とする. $0 < \frac{1}{n} < -x$

$\therefore x < -\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow x \notin A_n$ 矛盾. //

($x > 1$ の case も同様.)

例 2) $\underline{a_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)}$ のとき、

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

示すこと: $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$
s.t. $n \geq N \Rightarrow |b_n - \alpha| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} b_n - \alpha &= \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) - \frac{n\alpha}{n} \\ &= \frac{1}{n}\{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)\} \end{aligned}$$

仮定: $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t.
 $n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ をとる。仮定より、 $\varepsilon/2$ に対して、
 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $k \geq N \Rightarrow |a_k - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$
 とする。

$$\begin{aligned} |b_n - \alpha| &= \left| \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - \alpha) + \sum_{k=N}^n (a_k - \alpha) \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |a_k - \alpha| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |a_k - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geq N_1 &\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |a_k - \alpha| + \frac{n-N}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

- したがって、 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |a_k - \alpha| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

したがって、 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N_1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |a_k - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$

したがって、 $N_2 = \max(N, N_1)$ とすれば

$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \alpha| < \varepsilon.$$

P.34. 問 19 (1) → 下図の面積

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \dots + \frac{1}{n} \right) = 0$$

$\therefore a_n = \frac{1}{n}$ とかくと, $b_n = \frac{1}{n} \left(1 + \dots + \frac{1}{n} \right)$

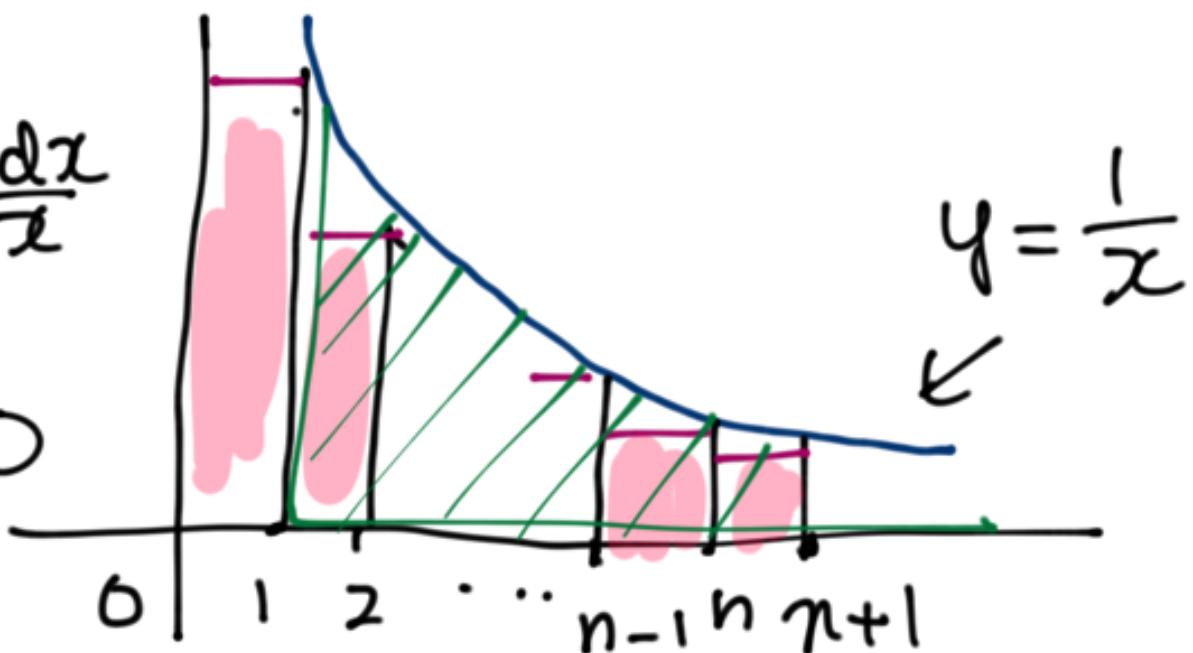
$a_n \rightarrow 0$ より, $b_n \rightarrow 0$.

図の考え方.

$$1 + \dots + \frac{1}{n} = 1 + \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$$

$$= 1 + \log(n+1)$$

$$\frac{1}{n} \log(n+1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$



発散 = 収束しない。

∞ り 発散する. \iff どんな大きな数を
とっても、ある番号から後は、それ以上りる.
 $\forall K \in \mathbb{R}$ K 対して、 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t.
 $n \geq N \Rightarrow a_n > K.$ \iff $a_n \xrightarrow{\text{def}} \infty$

レポート: P.7 問7 (5/2 演習時に提出)

定理 1. (1) $a_n \rightarrow \alpha, a_n \rightarrow \beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

(2) $a_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$ ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ は有界.

(3) $a_n \leq b_n (\forall n \in \mathbb{N}), a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$
 $\Rightarrow \alpha \leq \beta$

証明

$$(1) |\alpha - \beta| = |\alpha - a_n + a_n - \beta|$$

$$\leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta|.$$

$a_n \rightarrow \alpha, a_n \rightarrow \beta$ より $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$
s.t. $|a_n - \alpha|, |a_n - \beta| < \varepsilon$

$$\therefore |\alpha - \beta| < 2\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから $|\alpha - \beta| = 0$

証明

$$(1) |\alpha - \beta| = |\alpha - a_n + a_n - \beta|$$

$$\leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta|.$$

$a_n \rightarrow \alpha, a_n \rightarrow \beta$ は $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$
s.t. $|a_n - \alpha|, |a_n - \beta| < \varepsilon$

$$\therefore |\alpha - \beta| < 2\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから $|\alpha - \beta| = 0$

(2) $a_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$ は, $\varepsilon = 1$ に対して,
 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < 1$.

一方, $a_N, a_{N+1}, \dots \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$

一方, $\exists M > 0$ s.t. $a_1, \dots, a_{N-1} \in [-M, M]$

ゆえ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [\alpha - 1, \alpha + 1] \cup [-M, M]$

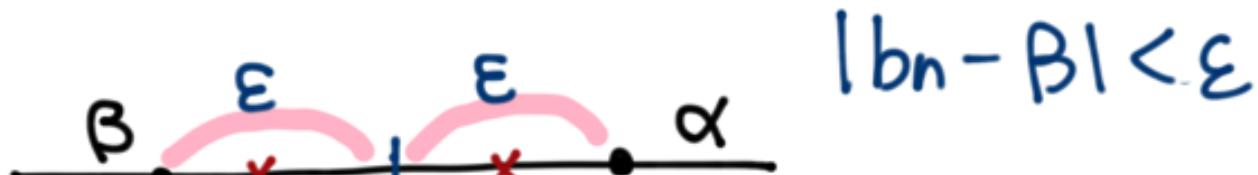
有界.

(2) $a_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) より, $\varepsilon = 1$ に対して,
 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < 1$.
 よって, $a_N, a_{N+1}, \dots \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$
 一方, $\exists M > 0$ c.t. $a_1, \dots, a_{N-1} \in [-M, M]$
 ゆえに $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [\alpha - 1, \alpha + 1] \cup [-M, M]$
有限.

(3) $\alpha \leq \beta$ を示す.

$\beta < \alpha$ と仮定して矛盾を打ちひびく.

$\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) > 0$ とする. $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$ より, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$



仮定に反す.

定理 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$

(1) $\lim(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \alpha_n (c \in \mathbb{R})$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (b_n \neq 0, \beta \neq 0)$

(3) の証明 $\forall \varepsilon > 0$ をとる.

$$\begin{aligned}|a_n b_n - \alpha \beta| &= |a_n b_n - a_n \beta + a_n \beta - \alpha \beta| \\&\leq |a_n(b_n - \beta)| + |\beta(a_n - \alpha)| \\&= |a_n| |b_n - \beta| + |\beta| \cdot |a_n - \alpha|\end{aligned}$$

$a_n \rightarrow \alpha$ ので, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界. よって, $\exists M > 0$

s.t. $|a_n| \leq M$ となる. $n > N$ のとき

$$\leq M |b_n - \beta| + |\beta| \cdot |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$K = \max(M, |\beta|)$ とおく. $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$ より

$\frac{\varepsilon}{2K} > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$|a_n - \alpha|, |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

定理3

(1) $a_n \leq b_n \leq c_n$, かつ $a_n, c_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$)
 $\Rightarrow b_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$)

(2) $a_n \rightarrow \infty \Rightarrow b_n \rightarrow \infty$

∴

$$|b_n - \alpha| = |b_n - a_n + a_n - \alpha| \leq |b_n - a_n| + |a_n - \alpha|$$

$$= b_n - a_n + |a_n - \alpha|$$

$$\leq (c_n - a_n) + |a_n - \alpha|$$

$$\downarrow (n \rightarrow \infty) \quad \downarrow$$

$$0 \leq c_n - a_n = \underbrace{c_n - \alpha}_{\downarrow} + \underbrace{(\alpha - a_n)}_{\uparrow}$$