

復習:

関数の級数展開

$f: x=a$ を含む開区間で C^∞ 級とする。

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

もし、 $R_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ならば

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

とあらわせる。 f の **テイラー展開** という。

とくに $a=0$ のとき、

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

マクローリン展開 という。

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(4) \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad (|x| < 1)$$

2変数の Taylor の定理

(a, b) と $(a+r, b+k)$ を結ぶ線分は D に含まれているとする。

$$f(a+r, b+k) = f(a, b) + \left(r \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{r!} \left(r \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^r f(a, b) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \left(r \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(r \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a+\theta r, b+\theta k) \\ (0 < \theta < 1)$$

陰関数(P.169)

$F(x, y) = 0$ のとき y を x で表わしたい。

→ $y = f(x)$ となるとき、これを $F(x, y)$ の陰関数という。

例) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$\Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ $x \neq \pm 1$ のときは x の近傍で C^1 級。(local)

定理 11

$F(x, y) : (a, b)$ の近傍で C^1 級。

$F(a, b) = 0, F_y(a, b) \neq 0$ とする。

$\Rightarrow x = a$ のある近傍で、 $y = f(x)$ で、

$F(x, f(x)) = 0$ となる f が存在する。

さら $f'(x) = -F_x(x, f(x))/F_y(x, f(x))$.

証明

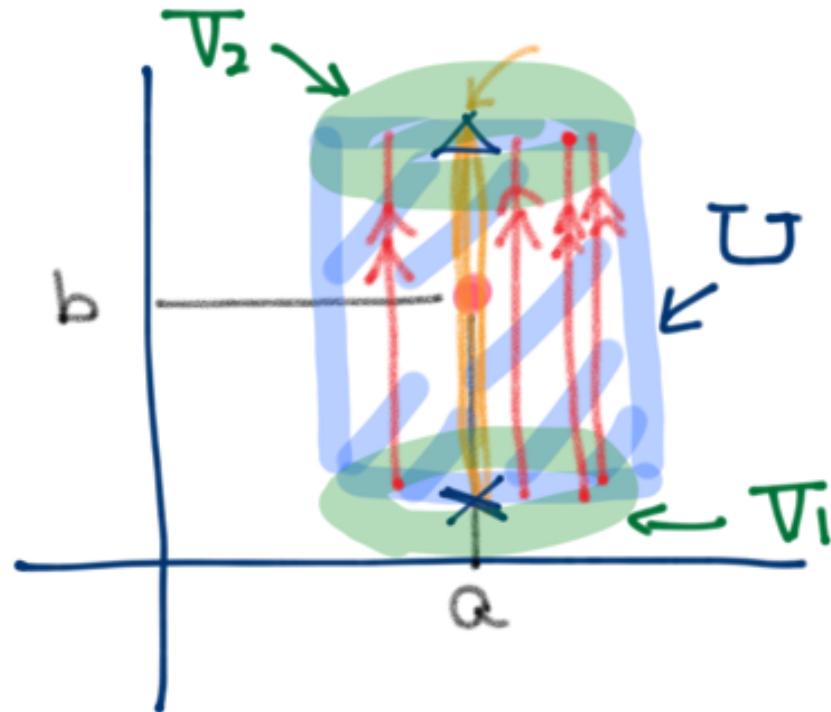
$F_y(a,b) > 0$ とする.

$F_y(x,y)$ は連続

$\Rightarrow (a,b)$ のある近傍 U

でも $F_y > 0$

| でも $F_y > 0$



$\Rightarrow F(a,y)$ は y について

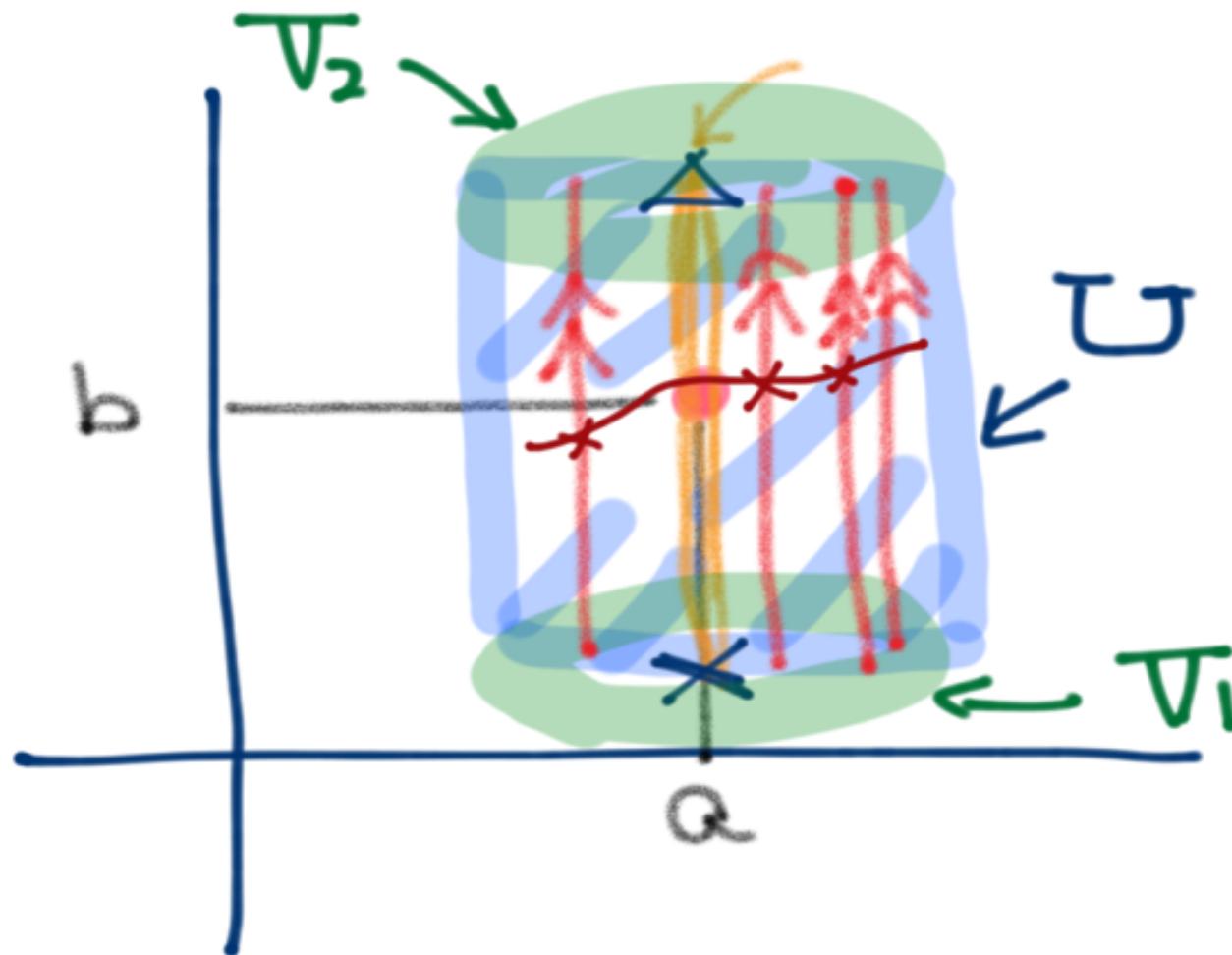
単調増加. $\Rightarrow \times$ では < 0 , Δ では > 0

F は連続 $\Rightarrow \times$ のある近傍 V_1 で F は < 0 ,

Δ のある近傍 V_2 で > 0 となる.

ここで ~~△△△~~ を考えると, その上で $F(x,y)$ は y について単調増加. 一元, ~~△△△~~ の始点で < 0 , 終点で > 0 . よって中間値の定理で $\exists f(x) \in F(x, f(x)) = D$

F は連続 $\Rightarrow \times$ のある近傍 V_1 で F は < 0 ,
 Δ のある近傍 V_2 で $> D$ となる.
 ここで ~~軸~~ を考えると, その上で $F(x, y)$ は y について単調増加. 一方, ~~軸~~ の始点で < 0 , 終点で > 0 . よって中間値の定理で $\exists f(x) \in F(x, f(x)) = 0$



微分の計算：泰勒の定理 ($n=1$) より、

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) = F(x, y) + \frac{F_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}{\cancel{O}} \cdot \Delta x \\ + \frac{F_y(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}{\cancel{O}} \cdot \Delta y \quad (0 < \theta < 1)$$

$y+\Delta y = f(x+\Delta x)$, $y = f(x)$ とする

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ のとき、右辺は有界. $\Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$ となる.

$$\underset{y}{F_x}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y) \rightarrow \underset{y}{F_x}(x, y)$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}. //$$

微分の应用.

P.50. (I) 不定形の極限.

定理5(コーシーの平均値定理)

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 連続で, (a, b) で微分可能
 $g'(x) \neq 0$ と仮定.

$\Rightarrow a < \exists c < b$ s.t.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

証明 $\varphi(x) = (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$
- $(f(b) - f(a))(g(x) - g(b))$ とおくと,

$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ので, $\varphi'(c) = 0$ となる

$a < c < b$ がとれる. $\varphi'(c) = 0$ をかぎこえると
主張をえる. //

定理6 (ロピタルの定理)

(1) $f, g: x=a$ の近傍で連続, $x=a$ 以外で
微分可能, $g'(x) \neq 0$, $f(a) = g(a) = 0$ とする.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (-\infty \leq l \leq +\infty) \text{ とする.}$$

このとき, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

(2) (1) の $g(x) \rightarrow \infty$ の場合. 主張は同じ.

(3) (1), (2) の $x \rightarrow \pm\infty$ の場合. 主張は同じ.

例) $f(x) = \log x$, $g(x) = x$, $a = 0$

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6} = \infty$$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ +\infty}} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \begin{matrix} \text{C-00が正} \\ +\infty \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \log x = t \rightarrow -\infty \\ x = e^t \end{matrix}$

$\rightsquigarrow x \rightarrow +\infty$ のときの発散のスピードは, $e^x > x^n > \log x$
 これを, $\log x \ll x^n \ll e^x$ ($x \rightarrow \infty$) とかく.

④注 この定理は不定形のときにも使える.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

証明⁽¹⁾ $f(a) = g(a) = 0$ ならびに、

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

" $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ $a < c < x$ ($x > a$)

$x \rightarrow a$ のとき $c \rightarrow a$ より $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow l$.

(2) $g(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow a$)



のとき、 $\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

"
$$\frac{\frac{f(\xi)}{g(x)} - \frac{f(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}} \rightsquigarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ 1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \right\} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(x_1)}{g(x)}$$

$$g(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow a) \quad \begin{array}{c} a \\ \bullet \\ \hline x \\ \bullet \\ \xi \\ \times \\ \bullet \\ x_1 \end{array}$$

のとき、 $\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

〃

$$\frac{\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - \frac{f'(x_1)/g(x_1)}{1 - g(x_1)/g(x)}}{1 - \frac{g(x_1)/g(x)}{g(x)}} \rightsquigarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ 1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \right\} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(x_1)}{g(x)}$$

$x \rightarrow a+0$ のとき、

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(x_1)/g(x_1)}{1 - g(x_1)/g(x)} \rightarrow 0 \quad \text{もしくは} \text{1/2乗法。}$$

よって、 $x \rightarrow a+0$ のとき $f'(x)/g'(x) \approx f(x)/g(x)$ は。

同じ limit をもつ。〃

(3) $x \rightarrow \infty$ のとき $x = \frac{1}{t}$ と変換して計算すればよい。

問172. $Z = f(x, y)$ を考える。

$$P_0 = (a, b)$$

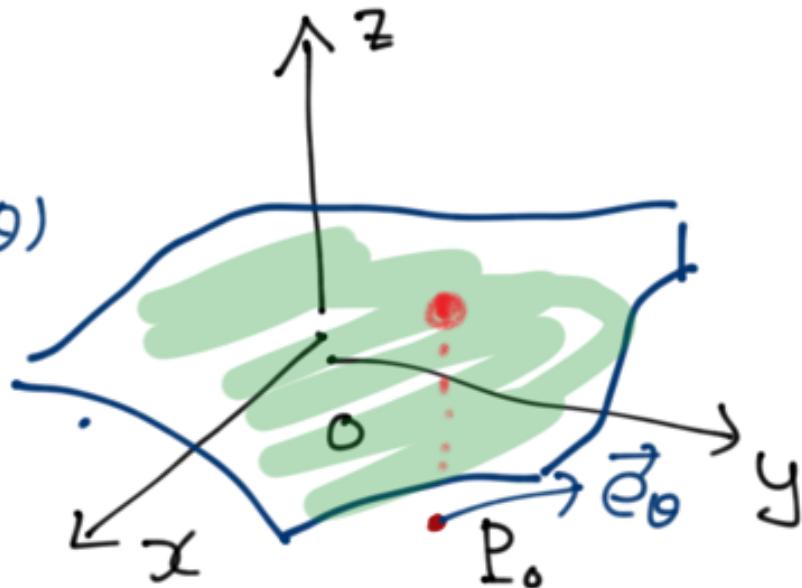
方向微分

$$\vec{e}_\theta \rightarrow (\cos \theta, \sin \theta)$$

P_0

\vec{e}_θ -方向の微分

$$f(P_0 + t\vec{e}_\theta) = g(t)$$



とおいて、 g の $t=0$ での微分 $\rightarrow \vec{e}_\theta$ -方向の微分 という

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(t) - g(0))$$

$$= \boxed{\cos \theta f_x(a, b) + \sin \theta f_y(a, b)}$$

$$\cos\theta f_x(a,b) + \sin\theta f_y(a,b)$$

θ を動かしてときく、□ の絶対値が max を与える
 θ を考えよ。

$\square = \vec{e}_\theta \cdot (f_x(a,b), f_y(a,b))$ がのべ。 \vec{e}_θ カ。
 $(f_x(a,b), f_y(a,b))$ と平行なとき max を与えよ。

$\rightsquigarrow (f_x(a,b), f_y(a,b))$ は
 値を max にする方向。

$\text{grad } f = (f_x, f_y)$
 を f の 勾配 という。

