

復習: テイラーの定理

$f(x): [a, b]$ で n 回微分可能

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \\ &+ \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n \end{aligned}$$

ここに $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$ $(a < \overset{\exists}{c} < b)$ ↙ ラグランジュの剰余項

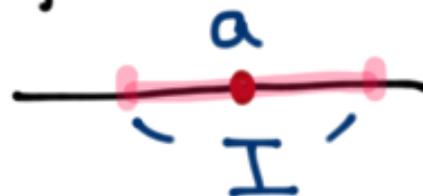
または

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\tilde{c})(b-\tilde{c})^{n-1}}{(n-1)!}(b-a) \quad (a < \overset{\exists}{\tilde{c}} < b)$$

↑ コーシーの剰余項

系 (P. 46)

$f: x=a$ を含む区間 I 上 n 回微分可能



$x \in I$ に対して

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1}$$

$$+ R_n \quad \exists \xi \in I, \xi \in I,$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

or

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1} (x-a)^n}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)) \quad (0 < \theta < 1)$$

例10. $f(x) = e^x$, $a = 0$ とする.

$$f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1. \text{ である.}$$

$$\text{よって, } e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \\ (0 < \theta < 1)$$

$x = 1$ とおくと,

$$e = 1 + 1 + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta} \quad (0 < \theta < 1)$$

e の近似 $\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

$\leadsto e$ が無理数であることがわかる
(\rightarrow 各自読む)

関数の級数展開

$f: x=a$ を含む開区間で C^∞ 級とする.

$\forall n \in \mathcal{N}$ n に対し,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

もし $R_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ならば

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

とあらわせる. f の **テイラー展開** という.

とくに $a=0$ のとき,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

マクローリン展開 という.

例 11) i^x

$$(1) e^{\circledast x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(2) \overset{i^x}{\sin x} = i x - \frac{i x^3}{3!} + \frac{i x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{i x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$(x \in \mathbb{R})$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$(x \in \mathbb{R})$

$$(4) \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$(|x| < 1)$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$(|x| < 1)$$

(1) ~ (5) を示すためには, $R_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)
を示す必要がある.

(1) の場合.

$$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ を示す.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0 \quad (\text{P.10 例 12})$$

(2), (3) も同様

$$f(x) = \sin x \text{ とすると}$$

$$f^{(n)}(x) = \pm \sin x \text{ or } \pm \cos x.$$

$$R_n = f^{(n)}(\theta x) \cdot \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)} \downarrow$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ とたどってしまう.}$$

右辺で左辺を定義する. Eulerの関係式

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} \text{ (指数法則?)}$$

$$= e^x (\cos y + i \sin y) \text{ (実は正しい)}$$

(4), (5) はユークリッドの剰余項を使う (略)

二変数のテイラーの定理 (P.168)

$f(a+h, b+k)$ と $f(a, b)$ とを比べる.

$f: C^n$ 級.

↓

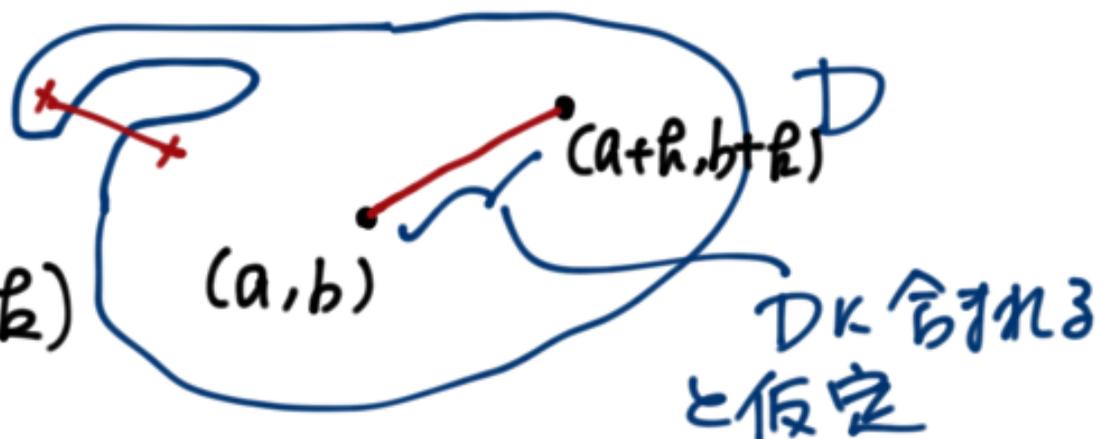
$$z(t) = f(a+th, b+tk)$$

とおく. ($0 \leq t \leq 1$)

→ 一変数 z になり, $z(1) = f(a+h, b+k)$

$$z(0) = f(a, b).$$

$z(t)$ に対してテイラーの定理を使う.



$$\begin{aligned}
 z(1) &= z(0) + \frac{d}{dt} z(0) \cdot 1 + \dots + \frac{d^k}{dt^k} z(0) \cdot \frac{1^k}{k!} \\
 &\quad + \dots + \frac{d^{(n+1)}}{dt^{n+1}} z(0) \cdot \frac{1^{(n+1)}}{(n+1)!} + R_n
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} z(t) &= \frac{d}{dt} f(a+tk, b+tk) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = k \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} z \rightsquigarrow f k \left(k \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ を行う}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) \rightsquigarrow \frac{dz}{dt} k \left(k \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ を行う}$$

$$\frac{d}{dt} z \rightsquigarrow f \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ を行う}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) \rightsquigarrow \frac{dz}{dt} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ を行う}$$

$$= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f \text{ とかく}$$

$$\frac{dz}{dt} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f \text{ とわかる}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f \right) \\ &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f \\ &= h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \end{aligned}$$

$f_{xy} = f_{yx}$
↓ 計算あり

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left((h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}) f \right) \\
&= (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}) (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}) f \\
&= h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f
\end{aligned}$$

$f_{xy} = f_{yx}$
 ↓ 計算する

よって、 $\frac{d^2 z}{dt^2} = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2 f$ かわかる

$$h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

以下 帰納的に

$$\frac{d^k z}{dt^k} = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^k f$$

以下归纳的 κ

$$\frac{d^n z}{dt^n} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f$$

$$= \sum_{r=0}^n h^r k^{n-r} \binom{n}{r} \frac{\partial^n}{\partial x^r \partial y^{n-r}} f$$

$f(a, b)$

$$z(1) = z(0) + \frac{d}{dt} z(0) \cdot 1 + \dots + \frac{d^k}{dt^k} z(0) \cdot \frac{1^k}{k!}$$

$$+ \dots + \frac{d^{(n+1)}}{dt^{n+1}} z(0) \cdot \frac{1^{(n+1)}}{(n+1)!} + R_n$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) \\ &+ \dots + \frac{1}{r!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^r f(a, b) + \dots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(a, b) + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a+\theta h, b+\theta k) \\ &\hspace{15em} (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$