

復習: 全微分可能

$f(x, y)$ が (x, y) で **全微分可能** とは,
あるベクトル $A = (a, b)$ が存在して,

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) (= \Delta f)$$

内積 \rightarrow

$$= A \cdot (h, k) + \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2} \quad \text{となり,}$$

$h, k \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon \rightarrow 0$ となるときをいう。

$f(x, y)$ が全微分可能ならば、自動的に
偏微可能で **実は**

$$A = (f_x, f_y) \text{ である.}$$

しかし、一般に偏微分可能だからと
いって、全微分可能とは限らない。

Q1. 全微分可能のメリットは?

- (Δf を内積で表せるので) 連鎖公式

- (x, y) の近傍の変化を表せる。(一次近似)

$(x, y) \rightarrow (u, v)$ への変数変換

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Q2: いつ全微可能となるのか? (判定条件)

一変数: f が微分可能.

ロールの定理

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a < \exists c < b \text{ s.t. } f'(c) = 0.$$

平均値定理

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < \exists c < b)$$

系 2. $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ は単調増加

減少

\therefore) 平均値定理より,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (a < \exists c < b)$$
$$> 0$$

$$\therefore f(b) > f(a). //$$

系. $f'(x) \equiv 0 \iff f$ は定数関数.

$\therefore (\Leftarrow)$ は自明.

(\Rightarrow) 平均値定理より, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$
 $= 0 //$

高階微分

$f'', f''', \dots, f^{(n)}$ ← n 回微分

$\frac{d^2 f}{dx^2} \quad \dots \quad \frac{d^n f}{dx^n}$

f が C^1 級 $\stackrel{\text{def}}{\iff} f'$ が連続

f が C^n 級 $\stackrel{\text{def}}{\iff} f^{(n)}$ が存在, 連続なとき.

f が C^∞ 級 $\stackrel{\text{def}}{\iff} f$ が何回でも微分可能.

C^∞ 級 $\Rightarrow C^n$ 級 $\Rightarrow C^1$ 級

ライプニッツの公式 (P.42)

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

☹ 略.

$f(x, y)$ の偏微分でも同様 v を考える。(P.162~)

$$(fx)_y = f_{xy} \leftarrow \text{とかく.}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \leftarrow \text{とかく.}$$

↑ 2階
↓

2階の偏微分: $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$

3階 " : f_{xxx}, f_{xyx}, \dots

$f(x, y)$ が C^n 級 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ n 階までの偏微分が
すべて存在して、連続なとき.

定理6 (シュワルツの定理 p.163)

(a, b) で f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} が存在し, f が C^2 級
ならば $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$

証明

$$\Delta = f(a+h, b+h) - f(a, b+h)$$

$$- f(a+h, b) + f(a, b) \text{ とおく.}$$

$$\varphi(x) = f(x, b+h) - f(x, b) \text{ とおくと,}$$

$$\Delta = \varphi(a+h) - \varphi(a). \text{ よって, 平均値定理より,}$$

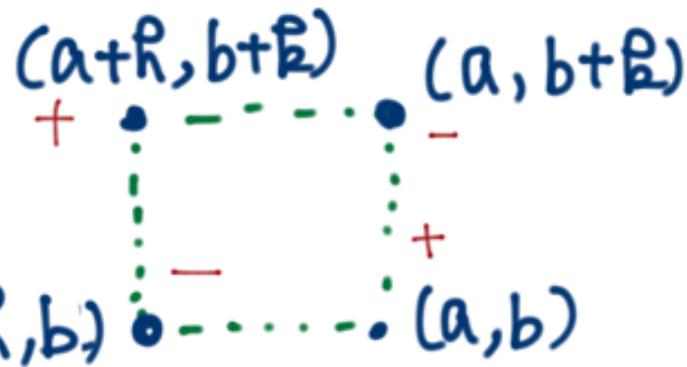
$$\Delta = h \varphi'(a + \theta_1 h) \quad \rightarrow \text{ } x \text{ について微分}$$

$$= h \{ f_x(a + \theta_1 h, b+h) - f_x(a + \theta_1 h, b) \}$$

$$= h h f_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 h) \leftarrow f_x(a + \theta_1 h, y) \text{ の平均値定理を使った.}$$

$(0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$

$$\psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y) \text{ とおくと,}$$



$\Delta = \psi(b+k) - \psi(b)$ であるから

再び平均値定理から、同様にして、

$$\Delta = h k f_{yx}(a + \theta_3 h, b + \theta_4 k) \quad (0 < \theta_3, \theta_4 < 1)$$

を得る。よって、

$$f_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) = f_{yx}(a + \theta_3 h, b + \theta_4 k)$$

f は C^2 級であるから、両辺で $h, k \rightarrow 0$ と

すれば $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ が得られる。 //

定理 7 (P. 164)

$f(x, y)$ が C^1 級ならば全微分可能である。

証明

$$\begin{aligned} & f(a+h, b+k) - f(a, b) \\ &= f(a+h, b+k) - f(a+h, b) + f(a+h, b) - f(a, b) \\ &= h f_y(a+h, b+\theta_1 k) + k f_x(a+\theta_2 h, b) \\ &= h (f_y(a, b) + \varepsilon_1) + k (f_x(a, b) + \varepsilon_2) \\ &= h f_x(a, b) + k f_y(a, b) + \underbrace{\varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k}_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ (h, k \rightarrow 0)}} \\ &\therefore f \text{ は } (a, b) \text{ 上全微分可能} \end{aligned}$$

C^1 級のため
 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \leq \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \sqrt{h^2 + k^2}$

テイラー展開

定理 4 (p.45 テイラーの定理)

$f: [a, b]$ で n 回微分可能

$$\Rightarrow f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} + R_n \quad \text{のとき, } (*)$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n \quad (a < c < b) \text{ とある. } \exists$$

ラグランジュの剰余項という

$R_n \frac{b-x}{b-a}$
とあいて φ
を定義
 $\varphi(a) = \varphi(b)$
 $\rightarrow \varphi'(c) = 0$

(*) で定まるもの

証明 $\varphi(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-x)^k + R_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^n}$ とおく.

すると, $\varphi(a) = \varphi(b) = f(b)$ とある.

証明 $\varphi(x) := \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} + R_n \cdot \frac{(b-x)^n}{(b-a)^n}$ とおく.

(*) 7. 定まるもの

すると, $\varphi(a) = \varphi(b) = f(b)$ とおける.

よって, 0-1 の定理より, $a < \exists c < b$ s.t.

$$\varphi'(c) = 0$$

$$\varphi'(x) = f'(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ f^{(k+1)}(x) \cdot \frac{(b-x)^k}{k!} - f^{(k)}(x) \cdot \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} \right\} - R_n \cdot \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}$$

$$f^{(n)}(x) \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} - f'(x)$$

$$\varphi'(c) = 0 \Rightarrow f^{(n)}(c) \cdot \frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} - R_n \cdot \frac{n(b-c)^{n-1}}{(b-a)^n} = 0$$

$$\therefore R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n$$

このとき, $R_n = f^{(n)}(c)(b-c)^{n-1} \cdot \frac{(b-a)}{(n-1)!}$ となる.
これをコーシーの剰余項という.